

Федеральное агентство по образованию  
Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)

В.М.Жданов

## **ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ И ПЛАЗМЕ**

**Учебное пособие**

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии» в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений*

*Москва 2008*

УДК 533.72 (075) , 533.9.01(075)

ББК 22.36я7

Ж42

Жданов В.М. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ И ПЛАЗМЕ. М.: МИФИ, 2008. – 240 с.

Учебное пособие посвящено рассмотрению явлений переноса (диффузии, вязкости, теплопроводности, электропроводности и связанных с ними перекрестных явлений) в газах и плазме. Теория неравновесных явлений излагается на основе единого подхода, в котором наряду с элементарной кинетической теорией, основанной на концепции средней длины свободного пробега частиц, широко используется “метод баланса импульса”, вместе обеспечивающие необходимое качественное описание всех явлений переноса. При этом в полной мере учитываются детали реального взаимодействия частиц (в том числе кулоновского) с использованием соответствующих эффективных сечений столкновений. Приводятся известные результаты строгой кинетической теории явлений переноса, позволяющие в большинстве случаев лишь скорректировать численные множители в выражениях для коэффициентов переноса, полученных на основе более простых подходов.

Книга может оказаться полезной для будущих инженеров-физиков в качестве введения в физику неравновесных явлений в газах и плазме. Она может рассматриваться также как дополнительное учебное пособие для студентов младших курсов, изучающих молекулярную физику в рамках стандартного курса общей физики.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент проф., д-р физ.-мат. наук. В.Д. Борман

ISBN 978-5-7262-1039-1

© Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ .....	8
1.1. Идеальность газа .....	9
1.2. Средняя длина свободного пробега молекул.....	10
1.3. Газовые законы.....	15
1.4. Поправки на неидеальность газа.....	16
1.5. Средняя кинетическая энергия теплового движения молекул .....	17
1.6. Равновесное распределение молекул газа по скоростям.....	18
1.7. Частота столкновений молекул со стенкой.....	24
1.8. Распределение Больцмана.....	26
1.9. Равновесное распределение по скоростям и внутренним состояниям молекул.....	27
1.10. Теплоемкость идеальных газов.....	31
1.11. Газовая смесь.....	38
1.12. Локально-равновесные распределения.....	41
1.13. Установление равновесия в газе с внутренними степенями свободы молекул.....	44
1.14. Распространение звука в газе.....	46
ГЛАВА 2. ПЛАЗМА.....	48
2.1. Методы получения плазмы .....	50
2.2. Параметры космической плазмы.....	53
2.3. Идеальный газ и идеальная плазма.....	54
2.4. Квазинейтральность плазмы.....	58
2.5. Длина Дебая и плазменная частота.....	59
2.6. Экранирование поля заряженной частицы в плазме.....	62
2.7. Еще раз о критерии неидеальности плазмы.....	64
2.8. Плазменные колебания и плазменные волны.....	66
2.9. Ионизационное равновесие в плазме. Формула Саха.....	70
ГЛАВА 3. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА.....	76
3.1. Потоки величин .....	77
3.2. Уравнения сохранения для простого газа .....	82

3.3. Внутреннее трение и теплопроводность.....	86
3.4. Уравнения сохранения в газовой смеси .....	92
3.5. Диффузия в газовой смеси.....	97
3.6. Тепловой поток в газовой смеси.....	102

#### ГЛАВА 4. СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В ГАЗЕ И ПЛАЗМЕ.....105

4.1. Динамика упругого парного столкновения частиц.....	107
4.2. Сечения рассеяния и эффективные сечения столкновений частиц.....	110
4.3. Динамическая задача рассеяния для упругого столкновения частиц.....	112
4.4. Столкновения нейтральных частиц.....	115
4.5. Ион-атомные столкновения.....	120
4.6. Кулоновские взаимодействия заряженных частиц.....	122
4.7. Электрон-нейтральные столкновения.....	127
4.8. Среднее число столкновений частиц в газе.....	129
4.9. Частота столкновений частиц и средняя длина свободного пробега.....	132
4.10. Средняя передача импульса при столкновениях частиц разного сорта .....	134
4.11. $\Omega$ - интегралы кинетической теории .....	138

#### ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА. ВЯЗКОСТЬ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И САМОДИФФУЗИЯ В ГАЗЕ.....141

5.1. Метод средней длины свободного пробега.....	142
5.2. Вязкость простого газа.....	143
5.3. Теплопроводность простого газа.....	147
5.4. Самодиффузия .....	149
5.5. Сравнение с результатами строгой кинетической теории ..... явлений переноса.....	151
5.6. Теплопроводность многоатомных газов. Фактор Эйкена.....	158
5.7. Вязкость и теплопроводность газовых смесей.....	161

#### ГЛАВА 6. ДИФFUЗИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ.....167

6.1. Метод баланса импульса. Сила диффузионного трения.....	167
6.2. Концентрационная диффузия.....	170

6.3. Уравнение движения для отдельного компонента смеси. Бародиффузия.....	172
6.4. Термодиффузия в газовой смеси.....	176
<b>ГЛАВА 7. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ.....</b>	<b>185</b>
7.1. Общие уравнения переноса для многокомпонентной плазмы.....	185
7.2. Эффективные частоты столкновений частиц в плазме.....	191
7.3. Обобщенный закон Ома.....	197
7.4. Диффузия в слабо ионизованном газе.....	203
<b>ГЛАВА 8. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ.....</b>	<b>209</b>
8.1. Электропроводность частично ионизованного газа.....	209
8.2. Теплопроводность плазмы.....	215
8.3. «Термосила» и термодиффузия в плазме.....	218
8.4. Вязкость плазмы.....	222
8.5. Влияние магнитного поля на коэффициенты переноса.....	225
Приложение 1. Интегралы от распределения Максвелла.....	228
Приложение 2. Таблицы $\Omega^*$ -интегралов.....	230
Приложение 3. Средняя передача импульса и энергии при столкновениях частиц в неизотермической плазме.....	231
Приложение 4. Вычисление «термосилы».....	234
Список используемой литературы.....	238

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга возникла на основе материалов лекционного курса “ Введение в физику плазмы”, читаемого автором студентам тех физических специальностей МИФИ, для которых этот предмет не является базовым, но призван дать необходимое введение в круг вопросов, охватываемых современной физикой плазмы. Заметная часть курса связана с обсуждением неравновесных процессов в газах и плазме – *явлений переноса и релаксации*. Понимание этих явлений и умение рассчитывать характерные времена релаксации процессов и коэффициенты переноса (*вязкость, теплопроводность, диффузию, электропроводность*) оказываются крайне необходимыми для современного инженера-исследователя.

Известно, что математически строгое рассмотрение неравновесных явлений в газах и плазме относится к области *физической кинетики* – одного из разделов курса теоретической физики. В основе соответствующего анализа этих явлений лежит обычно классическое кинетическое уравнение с интегралом столкновений Больцмана для нейтральных и слабоионизованных газов либо соответствующим интегралом в форме Ландау для полностью ионизованной плазмы. В рамках семестрового курса, посвященного общим вопросам физики плазмы, трудно найти достаточное время для последовательного изложения строгой теории явлений переноса и методов вычисления соответствующих кинетических коэффициентов (коэффициентов переноса).

В настоящей книге автором сделана попытка дать анализ явлений переноса в более сжатой и, по необходимости, более упрощенной форме на основе единого подхода, одинаково применимого как к обычным газам и газовым смесям, так и к плазме. При этом удается избежать более сложных подходов, связанных с применением кинетического уравнения, хотя детали реального взаимодействия частиц (в том числе кулоновского) и соответствующие им эффективные сечения столкновений учитываются в полной мере.

Первым шагом в реализации поставленной задачи является использование *элементарной* кинетической теории явлений переноса, основанной на концепции *средней длины свободного пробега* молекул между столкновениями. Важными достоинствами такого способа рассмотрения являются простота и ясный физический смысл

самой процедуры получения необходимых результатов, которые приводят в основном к правильным качественным зависимостям коэффициентов переноса от основных параметров газа и плазмы. В книге используется обобщение этого метода для анализа явлений *вязкости и теплопроводности* газов, газовых смесей и плазмы (с коррекцией численных множителей, учитывающей результаты строгой теории). При рассмотрении *диффузионных явлений* в газах и плазме нами широко используется другой метод, основанный на уравнении баланса импульса (уравнении движения) для отдельного компонента смеси. Применяемый при этом подход соответствует так называемому *квазигидродинамическому приближению* в теории газа и плазмы и дает достаточно надежные результаты при расчетах ряда коэффициентов переноса. Известные результаты строгой кинетической теории позволяют лишь скорректировать в отдельных случаях численные множители в выражениях для коэффициентов переноса.

Главы 1 и 2 являются вводными к основной теме книги. В них обсуждаются равновесные свойства газа и плазмы и вводится ряд необходимых параметров, используемых в дальнейшем анализе. В главе 3 на основе феноменологического подхода формулируются общие уравнения сохранения в газе и газовой смеси и обсуждаются используемые в них линейные соотношения переноса. В главе 4 детально рассматривается динамика упругих столкновений частиц, результаты которой применяются затем для определения эффективных сечений рассеяния частиц. Остальные главы книги посвящены собственно кинетической теории явлений переноса в газе и плазме, рассматриваемой на основе заявленных выше приближенных подходов.

Известно, что краткое обсуждение явлений переноса в газах является неотъемлемой частью основных университетских курсов общей физики. Автор надеется, что настоящая книга может послужить также полезным дополнительным учебным пособием для студентов младших курсов, которые начинают изучать молекулярную физику в рамках традиционного курса общей физики.

Автор выражает искреннюю признательность профессору, д-ру физ.-мат. наук В.Д.Борману за ряд полезных замечаний по содержанию книги.

## ГЛАВА 1. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Мы начнем наше обсуждение со свойств обычного газа в состоянии термодинамического равновесия. Это позволит ввести ряд важных определений и параметров, необходимых в дальнейшем для анализа как равновесных, так и неравновесных состояний газа и плазмы. В основе принятого ниже рассмотрения лежит молекулярно-кинетическая теория газов, важной составной частью которой наряду с элементарными представлениями является использование понятия функции распределения по скоростям и внутренним состояниям молекул.

Газ – это состояние вещества, в котором образующие его частицы находятся на значительных расстояниях друг от друга (по сравнению с их собственными размерами) и большую часть времени проводят в свободном движении. В отличие от жидкости и твердого тела, где молекулы оказываются существенно сближенными и связанными между собой значительными по величине силами притяжения и отталкивания, взаимодействие частиц в газе проявляется лишь в короткие моменты их сближения (столкновения). При каждом таком столкновении происходит резкое изменение величины и направления скорости их движения. Поскольку число молекул в газе огромно (при нормальных условиях<sup>1</sup> в одном кубическом сантиметре газа содержится  $2,7 \cdot 10^{19}$  частиц), характер движения молекул в газе отличается полной беспорядочностью (хаотичностью). Следствием хаотичности движения молекул газа оказывается то, что в состоянии равновесия частицы равномерно распределяются по занимаемому газом объему. По той же причине в газе с равными вероятностями представлены все направления движения молекул, а их абсолютные скорости меняются в широких пределах от очень малых до очень больших значений. В среднем молекулы газа движутся с достаточно высокими по обычным меркам скоростями. Так, для молекул азота в воздухе при нормальных условиях средняя тепловая скорость частиц равна 454 м/с. Отметим, что скорость звука в воздухе при этих условиях равна 330 м/с.

---

<sup>1</sup> Напомним, что нормальным условиям соответствуют давление  $p = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$  и температура  $t = 0^\circ \text{ C}$  ( $T = 273,15 \text{ К}$ ).



## 1.1. Идеальность газа

Законы, определяющие свойства и поведение газа, легче всего формулируются для случая так называемого *идеального газа* или газа относительно низкой плотности. В таком газе среднее расстояние между молекулами предполагается большим по сравнению с радиусом действия межмолекулярных сил. Фактически газ считается идеальным, если осредненной по времени потенциальной энергией взаимодействия его молекул можно пренебречь по сравнению со средней кинетической энергией их движения.

Порядок величины среднего расстояния между молекулами  $\bar{r}$  можно определить исходя из следующих простых соображений. Выберем какой-либо единичный объем газа в виде куба. Пусть число молекул в этом объеме (плотность числа молекул) равно  $n$ . Предположим, что молекулы равномерно распределены по объему выбранного куба, находясь на расстояниях  $r$  друг от друга. Очевидно, что в этом случае выполняется условие  $nr^3 = 1$ . В реальности молекулы распределены в пространстве совершенно хаотично, поэтому можно говорить лишь о некотором среднем расстоянии между ними, которое можно оценить из условия

$$\bar{r} \sim n^{-1/3}.$$

Воспользуемся приближенной моделью взаимодействия частиц газа, в которой молекулы представляются твердыми упругими сферами, напоминающими бильярдные шары. Пусть диаметр этих сфер равен  $d$ . Введем безразмерный параметр  $\alpha = nd^3 \approx (d/\bar{r})^3$ , который называют иногда *параметром плотности* или *параметром газовойности*. По порядку величины он определяется отношением объема самой молекулы к среднему объему, приходящемуся в газе на одну молекулу. Условие идеальности газа соответствует, очевидно, малости параметра плотности, т.е.  $\alpha \ll 1$ . Если  $\alpha \sim 1$ , то газ находится в сильно сжатом состоянии и оказывается *неидеальным*.

В модели твердых упругих сфер взаимодействие между ними происходит лишь при их непосредственном соприкосновении, когда расстояние между центрами одинаковых сфер равно  $d$ . Заметим, что и в случае произвольного характера взаимодействия моле-

кул между собой, включающего силы отталкивания на близких расстояниях и силы притяжения – на далеких, можно ввести некоторый *эффективный диаметр* молекулы  $d_{\text{эфф}}$ , соответствующий примерно расстоянию между взаимодействующими частицами, при котором потенциальная энергия взаимодействия частиц сравнивается со средней кинетической энергией их относительного движения. Характерный диаметр молекул для типичных газов в модели твердых упругих сфер можно в среднем оценить как  $d \sim 4 \cdot 10^{-8}$  см (табл. 1). В соответствии с условием  $\alpha = nd^3 \ll 1$  это означает, что газ является идеальным, если  $n \ll 1,6 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup>. Выполнению этого неравенства заведомо отвечает любой газ (например, воздух), находящийся при нормальных условиях, поскольку, как уже отмечалось, в этом случае число молекул в одном кубическом сантиметре газа равно  $2,7 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup> (*число Лошмидта*). Среднее расстояние между молекулами  $\bar{r}$  соответствует при этом величине  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$  см, что на порядок больше характерного размера самих молекул (параметр плотности  $\alpha \sim 10^{-3}$ ). Отметим, что при фиксированном давлении газа условие идеальности удовлетворяется тем лучше, чем выше его температура, поскольку плотность газа, как это следует из уравнения состояния идеального газа (см. ниже), меняется обратно пропорционально его температуре.

## 1.2. Средняя длина свободного пробега молекул

Помимо среднего расстояния между молекулами важной характеристикой газа является *средняя длина свободного пробега* молекул между столкновениями. Каждая частица в газе испытывает очень большое число столкновений с другими частицами. В промежутке между столкновениями молекулы движутся практически прямолинейно, испытывая резкие изменения скорости лишь в момент самого столкновения. Естественно, что длины прямолинейных участков на пути молекулы могут быть различными, поэтому имеет смысл говорить лишь о некотором среднем расстоянии, которое проходит молекула между двумя последовательными столкновениями.

За время  $\Delta t$  молекула проходит сложный зигзагообразный путь, равный  $\langle v \rangle \Delta t$ , где  $\langle v \rangle$  – средняя тепловая скорость частиц (рис.1.1). Изломов траектории на этом пути столько же, сколько произошло столкновений. Пусть  $Z$  означает число столкновений, которое испытывает молекула в единицу времени. Средняя длина свободного пробега равна тогда отношению длины пути  $\langle v \rangle \Delta t$  к полному числу столкновений  $Z \Delta t$ , испытанных молекулой на этом пути,

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle \Delta t}{Z \Delta t} = \frac{\langle v \rangle}{Z}. \quad (1.1)$$

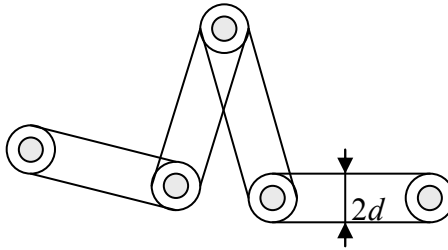


Рис.1.1

Для оценки величины  $Z$  воспользуемся простыми соображениями. Будем считать, по-прежнему, что молекулы представляют собой твердые упругие сферы диаметра  $d$ , которые равномерно распределены в объеме газа с плотностью  $n$ . Предположим вначале, что молекула движется в среде, где все остальные молекулы неподвижны. Легко заметить, что молекула пролетает мимо другой молекулы, не испытав столкновения с ней, если расстояние между центрами молекул превышает величину, равную диаметру одной сферы. Следовательно, за время  $t$ , равное 1 с, молекула будет взаимодействовать только с теми партнерами по столкновению, центры которых расположены в объеме цилиндра длиной  $\langle v \rangle$  и с площадью основания  $\sigma = \pi d^2$  (рис.1.2). На самом деле, после каждого столкновения направление движения молекулы меняется,

и мы должны рассматривать ее движение в цилиндре, составленном как бы из отдельных колен (см. рис. 1.1), однако, вид наших рассуждений не меняется, если мы будем считать этот коленчатый цилиндр выпрямленным.

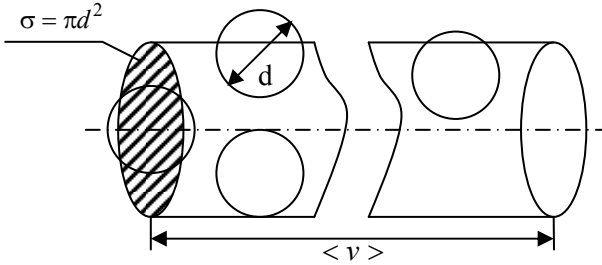


Рис. 1.2

Величину  $\sigma = \pi d^2$  называют *поперечным сечением столкновений молекул*. Для рассматриваемого нами случая оно представляет собой сечение воображаемой сферы, окружающей молекулу, внутрь которой не может проникнуть центр никакой другой молекулы. Число молекул в объеме рассматриваемого цилиндра равно  $n \langle v \rangle \sigma$ . Таким же будет число столкновений, т.е.  $Z = n \langle v \rangle \sigma$ . Используя (1.1), находим

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} . \quad (1.2)$$

На самом деле, конечно, в газе одновременно находятся в движении все молекулы, поэтому в выражение для  $Z$  должна входить средняя скорость относительного движения молекул, так что  $Z = n \langle v_{\text{отн}} \rangle \sigma$ . Более точный расчет с использованием *максвелловского распределения по скоростям* (см. гл. 4), показывает, что  $\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$ . В результате для числа столкновений имеем  $Z = n \sqrt{2} \langle v \rangle \sigma$ . Используя определение (1.1), приходим к известной в элементарной кинетической теории формуле

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2}p\pi d^2} . \quad (1.3)$$

Значения средней длины свободного пробега  $\lambda$  при нормальных условиях для ряда обычных газов, рассчитанные по формуле (1.3), приведены в табл. 1. Здесь же приводятся значения эффективного диаметра молекул  $d$ , соответствующего модели твердых упругих сфер, которые оценивались из экспериментальных данных по вязкости газа.

Таблица 1.1

Газ	$d, 10^{-8} \text{ см}$	$\lambda, 10^{-6} \text{ см}$	Газ	$d, 10^{-8} \text{ см}$	$\lambda, 10^{-6} \text{ см}$
$H_2$	2,74	11,1	$O_2$	3,61	6,42
$He$	2,18	17,6	$CO_2$	4,59	3,97
$Ne$	2,59	12,5	$CH_4$	4,14	4,88
$Ar$	3,64	6,32	$C_2H_4$	4,95	3,42
$Kr$	4,16	4,84	$HCl$	4,46	4,21
$Xe$	4,85	3,56	$NH_3$	4,43	4,26
$N_2$	3,75	5,95	$H_2O$	4,60	3,95

Понятие средней длины свободного пробега, использующее модель молекул – твердых упругих сфер, было введено в кинетическую теорию газов австрийским ученым *Клаузиусом* еще в 1868 г. Обобщение этого представления на случай, когда учитывается реальный характер взаимодействия молекул, оказывается возможным при введении так называемых *эффективных сечений рассеяния*. Подробней этот вопрос мы обсудим в гл.4.

Учитывая, что  $n \sim \bar{r}^{-3}$ , находим, что

$$\lambda \sim \bar{r} \left( \frac{\bar{r}}{d} \right)^2 = d \left( \frac{\bar{r}}{d} \right)^3.$$

Это означает, что для идеального газа ( $\alpha \ll 1$ ) выполнены неравенства

$$d \ll \bar{r} \ll \lambda . \quad (1.4)$$

Так, для молекул азота при нормальных условиях  $d \sim 4 \cdot 10^{-8}$  см,  $\bar{r} \sim 3 \cdot 10^{-7}$  см и  $\lambda \sim 6 \cdot 10^{-6}$  см.

Введение средней длины свободного пробега молекул позволяет выделить различные режимы течения газа, если сравнивать эту величину с характерным внешним параметром задачи  $L$ . Параметр  $L$  может характеризовать, например, размер системы, размер обтекаемого тела, длину волны периодического возмущения, распространяющегося в газе, и т.д. Безразмерная величина отношения средней длины свободного пробега  $\lambda$  к характерной длине  $L$  носит название *числа Кнудсена* ( $Kn = \lambda/L$ ).

Малость чисел Кнудсена ( $Kn \ll 1$ ) соответствует *модели сплошной среды* или так называемому гидродинамическому приближению в теории газов. В этом приближении может быть обоснована система *уравнений газодинамики*, описывающая изменение во времени и в пространстве основных гидродинамических переменных газа: плотности, скорости и температуры. В первом порядке по числу Кнудсена в эти уравнения входят так называемые *линейные соотношения переноса*, связывающие поток тепла (плотность потока энергии) и касательные (вязкие) напряжения (плотность потока импульса) с производными по координатам от основных гидродинамических переменных. Коэффициенты пропорциональности в этих соотношениях носят название *коэффициентов переноса*. Простейшие способы их вычисления и оценок могут быть основаны на концепции средней длины свободного пробега молекул (см. гл. 5). Число Кнудсена как малый параметр используется и в более точной теории явлений переноса, основанной на приближенных методах решения кинетического уравнения Больцмана [1].

Другой предельный случай ( $Kn \gg 1$ ) соответствует так называемому *кнудсеновскому газу*. В этих условиях средняя длина свободного пробега молекул  $\lambda$  заметно превышает характерный размер  $L$ , и основную роль играют не столкновения молекул между собой, а их столкновения со стенкой (например, со стенками сосуда, в котором находится газ).

При анализе неравновесных процессов, в которых параметры газа меняются во времени, или так называемых *процессов релаксации*,

полезным оказывается также введение ряда временных параметров. К ним относятся характерное время взаимодействия частиц между собой  $\tau_0 = a/\bar{v}$ , характерное время свободного пробега молекул  $\tau = \lambda/\bar{v}$  и характерное время задачи  $\tau_L = L/\bar{v}$ . Для рассматриваемого нами идеального газа при условии малости числа Кнудсена в этом случае выполняются неравенства

$$\tau_0 \ll \tau \ll \tau_L . \quad (1.5)$$

## 1.2. Газовые законы

Законы идеального газа (например, закон *Бойля и Мариотта*, закон *Гей-Люссака*) были в свое время открыты опытным путем. Оба указанных закона объединяются в универсальное уравнение *Клапейрона- Менделеева*, которое называется также *уравнением состояния идеального газа*

$$pV = \nu RT . \quad (1.6)$$

Здесь  $p$  – давление,  $V$  – объем,  $T$  – абсолютная температура,  $\nu$  – число молей газа. Величина  $R = 8,314$  Дж/моль·К носит название *универсальной газовой постоянной*. Напомним, что *молем* называется количество вещества, масса которого в граммах равна атомной или молекулярной массе газа  $M$ . Один моль любого вещества содержит одно и то же число молекул, равное *числу Авогадро*  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>. Используя соотношение  $n = N/V = \nu N_A/V$ , уравнение состояния можно представить в виде

$$p = nkT , \quad (1.7)$$

где вводится величина  $k = R/N_A = 1,381 \cdot 10^{-23}$  Дж/К, которая носит название *постоянной Больцмана*.

Из уравнения состояния идеального газа непосредственно следует закон *Авогадро*, который был установлен им в 1811 г.: *при одинаковых давлениях и температурах в равных объемах любого газа содержится одинаковое число молекул*. Этот же закон может быть сформулирован другим образом: *один моль любого газа при одинаковых температуре и давлении занимает один и тот же объем* (при нормальных условиях равный  $22,41 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>). Другой закон, относящийся к смесям идеальных газов, носит название *закона*

*Дальтона: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений ее компонентов*

$$p = \sum_{\alpha} p_{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} kT . \quad (1.8)$$

*Парциальным давлением  $p_{\alpha}$  какого-либо газа (или компонента  $\alpha$  газовой смеси) называется давление, которое оказывал бы этот газ, если бы он один занимал весь объем, занимаемый газовой смесью.*

#### ***1.4. Поправки на неидеальность газа***

С ростом давления и уменьшением температуры состояние газа начинает все больше отклоняться от идеальности. Экспериментальные исследования показали, например, что для азота при температуре  $T=273\text{К}$  и давлении  $p=100\text{атм}$  ошибка в определении объема газа, если пользоваться уравнением состояния (1.7), составляет до 7%. Это связано с тем, что при таком давлении молекулы газа в среднем удалены друг от друга на расстояние, которое только вдвое больше их собственных размеров, а собственный объем молекул лишь в 20 раз меньше объема газа. При дальнейшем повышении давления становится все более существенным учет влияния как сил межмолекулярного взаимодействия, так и собственного объема молекул на характер поведения газа.

Пока отклонения от идеальности малы, их можно учесть с помощью *вириального разложения* или разложения давления в ряд по степеням от числовой плотности молекул  $n$

$$p = nkT(1 + b(T)n + c(T)n^2 + \dots) , \quad (1.9)$$

где  $b(T), c(T), \dots$  – так называемые *вириальные коэффициенты*, зависящие в общем случае от температуры. Для модели молекул – твердых упругих сфер диаметра  $d$  теоретические оценки дают

$$b = \frac{2}{3} \pi d^3 , \quad c = 0,625 b^2 .$$

Как видно, отклонения от уравнения состояния идеального газа (1.7) образуют степенное разложение по параметру плотности  $\alpha = nd^3$ .



Для учета более сильных отклонений предложено много полуэмпирических и эмпирических уравнений состояния реальных газов, из которых наиболее часто используется *уравнение Ван-дер-Ваальса*, которое записывается в виде

$$\left[ p + \left( \frac{N}{V} \right)^2 a \right] (V - b) = \nu RT . \quad (1.10)$$

При записи этого уравнения учитывается как наличие собственного объема молекул (постоянная  $b$ , равная учетверенному объему молекул), так и влияние сил притяжения между молекулами (постоянная  $a$ ). Из уравнения Ван-дер-Ваальса вытекает, в частности, существование наблюдаемой на опыте критической температуры и критического состояния. Критическое состояние характеризуется значением  $T_k$  и соответствующими ему значениями  $p_k$  и  $V_k$ . При критической температуре  $T_k$  исчезает различие между разными состояниями вещества. Выше этой температуры переход от жидкости к газу либо, наоборот, от газа к жидкости оказывается непрерывным (т.е. без фазовых превращений).

В последующем изложении при анализе различных явлений в газе влияние поправок на неидеальность газа рассматриваться не будет.

### **1.5. Средняя кинетическая энергия теплового движения молекул**

Уравнение состояния идеального газа в форме (1.6) или (1.7) легко обосновывается методами кинетической теории газов. Используя элементарный кинетический подход, можно вывести выражение для давления идеального газа в сосуде, которое получается как результат усреднения импульсов молекул, передаваемых стенке сосуда при многочисленных соударениях молекул со стенкой. Величина получаемого при этом давления записывается как

$$p = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle , \quad (1.11)$$

где  $\langle v^2 \rangle$  – среднее значение квадрата скорости молекул,  $m$  – масса молекулы. Можно показать (см. ниже), что такое же выражение получается и в рамках более точного расчета с использованием максвелловского распределения молекул по скоростям. Средняя кинетическая энергия молекул газа (в расчете на одну молекулу) определяется очевидным выражением

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{p}{n} . \quad (1.12)$$

Как известно, именно кинетическая энергия поступательного движения атомов, усредненная по огромному числу беспорядочно движущихся частиц, является мерилем того, что называется температурой газа. Если температура  $T$  измеряется в градусах Кельвина (К), то связь между  $\langle E_K \rangle$  и  $T$  дается соотношением

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} kT . \quad (1.13)$$

Соотношение (1.13) позволяет придать отчетливый физический смысл уже введенной выше постоянной Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К, которая является фактически переводным коэффициентом, определяющим, какая часть джоуля содержится в градусе. Используя (1.12) и (1.13), находим  $(1/3)m \langle v^2 \rangle = kT$  или  $p = nkT$ . Мы приходим, таким образом, к уже известной записи уравнения состояния идеального газа в форме (1.7)

Заметим, что из приведенных выше соотношений следует также выражение для среднеквадратичной скорости молекул

$$\langle v \rangle_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} . \quad (1.14)$$

## **1.6. Равновесное распределение молекул газа по скоростям**

Рассчитываемые по формуле (1.14) значения  $\langle v \rangle_{кв}$  позволяют составить представление о порядке величины среднего значения

тепловых скоростей молекул для различных газов и разных значений температуры. Хотя в газе всегда имеется определенная доля молекул с малыми значениями абсолютной скорости и, наоборот, некоторое число достаточно быстрых молекул, наиболее значительная часть молекул обладает скоростями, значения которых группируются относительно наиболее вероятной при данной температуре величины. Значение наиболее вероятной скорости, соответствующей максимуму распределения молекул по абсолютным значениям их скоростей, не очень существенно отличается при этом от величины, даваемой формулой (1.14), и равно, как мы увидим ниже,

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} .$$

Само *распределение молекул по скоростям* устанавливается в газе в результате обмена импульсом и энергией при многочисленных столкновениях молекул между собой и со стенками сосуда, в котором находится газ. Вид этого универсального (не меняющегося во времени) распределения, был впервые теоретически установлен *Максвеллом* в 1860 г. На уровне макроскопического описания газа максвелловскому распределению молекул по скоростям соответствует состояние *теплового равновесия в газе*: давление и температура во всех местах внутри сосуда оказываются одинаковыми.

Вывод максвелловского распределения по скоростям может быть осуществлен несколькими различными способами. Вид его может быть, в частности, установлен с помощью простых соображений, основанных на применении так называемого *принципа детального равновесия*.

Отметим предварительно, что утверждение типа: "Такое-то число молекул в газе имеет скорость, например, 100 м/с", не имеет конкретного смысла. Нельзя точно указать скорость какой-либо группы молекул, но можно говорить о среднем числе молекул, скорости которых находятся в некотором малом интервале скоростей  $d\mathbf{v}$  между значениями  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Обозначим число (долю) этих молекул как  $dn(\mathbf{v}) = nF(\mathbf{v})d\mathbf{v}$ , где  $n$  – число молекул в единице объема. Следует напомнить, что скорость  $\mathbf{v}$  является вектором, поэтому функция  $F(\mathbf{v})$ , имеющая смысл функции вероятности, характеризует распределение молекул как по абсолютным значениям

(модулям) скоростей, так и по их направлениям. В декартовой системе координат с осями  $x, y, z$  это соответствует представлению интервала скоростей в виде  $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ . Если нас интересует распределение только по модулям скорости, то, используя в пространстве скоростей известное выражение для элемента объема  $d\mathbf{v} = v^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  в сферической системе координат, после интегрирования по углам  $\theta$  (от 0 до  $\pi$ ) и  $\varphi$  (от 0 до  $2\pi$ ) имеем

$$dn(\mathbf{v}) = 4\pi n v^2 F(v) dv . \quad (1.15)$$

Далее вместо  $F(\mathbf{v})$  мы будем использовать функцию распределения  $f(\mathbf{v}) = n F(\mathbf{v})$ , нормированную на числовую плотность молекул, так что

$$\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = n . \quad (1.16)$$

Для вывода максвелловского распределения рассмотрим две группы молекул, скорости которых лежат в интервалах  $d\mathbf{v}$  и  $d\mathbf{v}_1$ . В результате столкновений молекул первой и второй групп скорости  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_1$  сталкивающихся молекул изменяются и переходят в  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_1$  соответственно. Среднее число таких столкновений, называемых *прямыми столкновениями*, будет пропорционально  $dn dn_1$  или  $f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}_1)dv dv_1$ . *Обратными* мы будем называть столкновения, которые переводят молекулы из интервалов  $d\mathbf{v}'$  и  $d\mathbf{v}'_1$  в  $d\mathbf{v}$  и  $d\mathbf{v}_1$ . Среднее число обратных столкновений пропорционально, очевидно, величине  $f(\mathbf{v}')f(\mathbf{v}'_1)dv' dv'_1$ . Коэффициент пропорциональности в этих выражениях, зависящий от относительной скорости сталкивающихся частиц и от величины, называемой *дифференциальным сечением рассеяния*, будет рассмотрен нами позже при выводе строгих выражений для частоты столкновений частиц. Сейчас для нас существенно лишь то, что он оказывается одинаковым как для прямых, так и для обратных столкновений частиц. Принцип детального равновесия состоит в том, что в состоянии хаотического движения, соответствующего тепловому равновесию, скорости

прямого и обратного процессов должны быть одинаковы. В нашем случае это соответствует выполнению условия

$$f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}_1)d\mathbf{v}d\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}')f(\mathbf{v}'_1)d\mathbf{v}'d\mathbf{v}'_1. \quad (1.17)$$

Можно показать, что произведения элементов объема в пространстве скоростей для прямых и обратных столкновений равны (см. гл. 4). Поэтому написанное выше условие переходит в соотношение

$$f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}')f(\mathbf{v}'_1).$$

Логарифмирование этого соотношения дает

$$\ln f(\mathbf{v}) + \ln f(\mathbf{v}_1) = \ln f(\mathbf{v}') + \ln f(\mathbf{v}'_1). \quad (1.18)$$

Полученное равенство означает, что натуральные логарифмы функции распределения являются так называемыми аддитивными инвариантами. Они могут быть выражены через линейную комбинацию величин, которые также оказываются аддитивными инвариантами столкновений, т.е. сохраняются в парных столкновениях частиц. Такими величинами являются масса, импульс и кинетическая энергия частиц, поэтому

$$\ln f = \alpha_0 m + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot m\mathbf{v} + \alpha_2 \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \alpha_0 - \frac{1}{2} \beta m (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2. \quad (1.19)$$

Скорость  $\mathbf{u}$  просто характеризует выбор инерциальной системы отсчета и совпадает с макроскопической скоростью газа как целого. В равновесном состоянии удобно полагать  $\mathbf{u} = 0$ .

В общем случае функция распределения принимает вид

$$f = C \exp \left[ -\beta (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right]. \quad (1.20)$$

Константа  $C$  определяется из условия нормировки (1.16), которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} n &= C \int \exp \left[ -\beta (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right] d\mathbf{v} = C \int \exp \left[ -\beta v^2 \right] d\mathbf{v} = \\ &= C \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta v_x^2) dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta v_y^2) dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta v_z^2) dv_z = C \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь используются известное значение интеграла, содержащего экспоненту (см. Приложение 1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = (\pi/a)^{1/2} .$$

В результате

$$C = n \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} . \quad (1.22)$$

Для определения  $\beta$  вычислим среднюю кинетическую энергию молекул, полагая для простоты  $\mathbf{u} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle E_K \rangle &= \frac{\int \frac{1}{2} m v^2 f d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{v}} = \frac{mC}{2n} \int v^2 \exp(-\beta v^2) d\mathbf{v} = \\ &= 2\pi \frac{mC}{n} \int_0^{\infty} v^4 \exp(-\beta v^2) dv = \frac{3}{4} \frac{m}{\beta} . \end{aligned} \quad (1.23)$$

Здесь использовано представление (1.15) и известные значения интегралов из Приложения 1.

Сравнивая (1.23) и определение  $\langle E_K \rangle$  (1.13), находим

$$\beta = \frac{m}{2kT} . \quad (1.24)$$

В окончательном виде максвелловская функция распределения молекул по скоростям записывается как

$$f^M(v) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT} v^2\right) . \quad (1.25)$$

Легко показать, что если отказаться от условия  $\mathbf{u} = 0$ , то соответствующее распределение принимает форму

$$f^M(v) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2\right] , \quad (1.26)$$

что соответствует введению собственной скорости молекул  $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  или переходу в систему отсчета, движущуюся с макроскопической скоростью газа как целого.

Используя (1.25) и (1.15), можно определить относительную долю молекул, абсолютные скорости которых лежат в некотором узком интервале значений между  $v$  и  $v + dv$ ,

$$\frac{dn(v)}{n} = 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m}{2kT} v^2 \right) dv \quad (1.27)$$

Вид распределения  $dn/dv$ , описываемого выражением (1.27), для двух различных температур  $T_1$  и  $T_2 > T_1$  представлен на рис. 1.3.

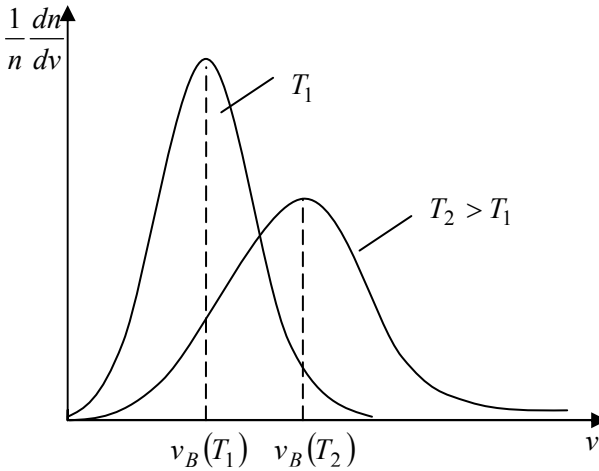


Рис. 1.3

Максимум этого распределения лежит при значении скорости, которая носит название наиболее вероятной скорости молекул. Ее величина определяется условием

$$\left( \frac{dn(v)}{dv} \right) = 0 \quad \text{при} \quad v = v_B,$$

откуда

$$1 - \frac{mv_B^2}{2kT} = 0$$

или

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} . \quad (1.28)$$

С ростом температуры максимум распределения смещается вправо.

Определим еще среднее значение модуля скорости частиц газа или так называемую среднюю тепловую скорость молекул

$$\langle v \rangle = \int v \frac{dn(v)}{n} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left( -\frac{m}{2kT} v^2 \right) dv .$$

Используя значения интегралов, приведенных в Приложении 1, находим

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} . \quad (1.29)$$

Заметим, что

$$\langle v \rangle = 1,128 v_B, \quad \langle v \rangle_{кг} = 1,225 v_B . \quad (1.30)$$

### 1.7. Частота столкновений молекул со стенкой

Получим еще одну важную для дальнейших приложений величину, а именно: определим *среднее число соударений* молекул с единичной поверхностью стенки в единицу времени (или *частоту столкновений молекул с единицей поверхности стенки*). Направим ось  $X$  перпендикулярно стенке. Выделим на стенке малую площадку  $\Delta s$ . Предположим, что молекулы, имеющие одинаковую скорость  $\mathbf{v}$ , движутся в направлении стенки и построим на площадке  $\Delta s$ , как на основании, косой цилиндр с образующей  $v\Delta t$  (рис. 1.4.). За время  $\Delta t$  через поверхность стенки  $\Delta s$  пройдет число молекул, находящихся в цилиндре, объем которого равен  $(v_x \Delta t) \Delta s$ , поскольку  $(v_x \Delta t)$  – высота цилиндра.

Назовем *плотностью потока частиц* число молекул, падающих на единицу поверхности стенки в единицу времени. Тогда плотность потока частиц, скорости которых лежат между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , определяется выражением

$$v_x^+ f^M(\mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (1.31)$$



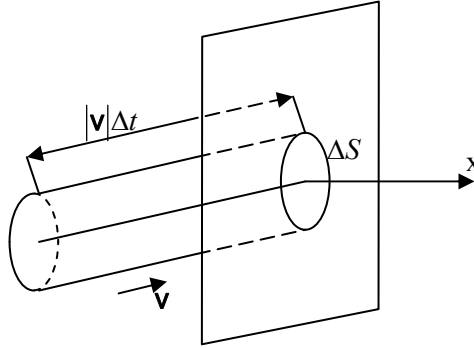


Рис. 1.4

где  $v_x^+$  – составляющая скорости молекул в направлении положительных значений оси  $X$ .

Полная плотность потока молекул или частота их столкновений, приходящихся на единицу поверхности стенки, определяется как

$$\begin{aligned}
 \nu &= \int v_x^+ f^M(v) dv = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v_x \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x \times \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right) dv_y \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z = n \left( \frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Учитывая определение средней тепловой скорости молекул  $\langle v \rangle$  (1.29), это выражение можно представить в виде

$$\nu = \frac{1}{4} n \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} = \frac{n \langle v \rangle}{4}. \quad (1.32)$$

Используя (1.31), можно также строго обосновать вывод выражения (1.11) для давления газа  $p$ . Давление на стенку сосуда, в который помещен газ, возникает в результате многочисленных ударов молекул о стенку. При ударе одной молекулы о стенку направление скорости в направлении  $x$  меняется на обратное, поэтому импульс, передаваемый в этом случае стенке, равен

$$mv_x^+ - (-mv_x^+) = 2mv_x^+.$$

Плотность потока импульса молекул по направлению к стенке со скоростями между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  определяется умножением  $mv_x^+$  на величину (1.31)

$$mv_x^+ v_x^+ f^M(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = m(v_x^+)^2 f^M(\mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

Давление на стенку есть удвоенный поток импульса молекул, нормального к поверхности стенки, проинтегрированный по всем скоростям частиц

$$\begin{aligned} p &= 2m \int (v_x^+)^2 f^M(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \\ &= 2mn \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right) dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z \int_0^{\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x. \end{aligned}$$

Производя интегрирование с использованием значений интегралов Приложения 1, получаем

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle, \quad (1.33)$$

что совпадает с выражением (1.11).

### 1.8. Распределение Больцмана

Если газ находится в потенциальном поле консервативных сил, то наряду с распределением Максвелла по скоростям в газе возникает пространственная неоднородность плотности частиц. Простейшим примером, когда соответствующая зависимость плотности от координаты получается при чисто гидродинамическом рассмотрении, является так называемая *барометрическая формула*

$$n = n_0 \exp(-mgz/kT), \quad (1.34)$$

где  $g$  - ускорение силы тяжести,  $z$  - координата, отсчитываемая вверх по направлению от поверхности Земли. Если температуру  $T$  предполагать постоянной, такое же распределение с высотой имеет давление  $p$ . Распределение (1.34) является частным случаем общего закона распределения Больцмана

$$n = n_0 \exp(-U/kT), \quad (1.35)$$

где  $U$  – потенциальная энергия молекулы во внешнем силовом поле,  $n_0$  – значение плотности газа при  $U = 0$ . Барометрической формуле (1.34) соответствует при этом потенциальная энергия молекул в поле силы тяжести  $U = mgz$ . Если ввести плотность  $n$  (1.35) в выражение (1.25), то мы приходим к функции распределения вида

$$f^{MB} = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2kT} v^2 - \frac{U}{kT} \right). \quad (1.36)$$

Полученное выражение справедливо и для неоднородного силового поля  $U(\mathbf{r})$ . При этом для числа молекул, попадающих в пределы объема  $d\mathbf{r} = dx dy dz$ , расположенного в точке  $\mathbf{r}(x, y, z)$ , и имеющих скорости в интервале  $dv = dv_x dv_y dv_z$ , имеем

$$dn = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{1}{kT} \left( \frac{mv^2}{2} + U(\mathbf{r}) \right) \right] dv d\mathbf{r}. \quad (1.37)$$

Эта формула носит название *распределения Максвелла-Больцмана*.

### **1.9. Равновесное распределение по скоростям и внутренним состояниям молекул**

Строго говоря, полученное выше максвелловское распределение по скоростям соответствует лишь поступательному движению молекул. При его выводе не учитываются внутренние степени свободы молекулы, связанные с ее вращательным движением и колебаниями входящих в ее состав атомов. Характер поступательного движения двухатомных и многоатомных молекул не отличается от поступательного движения одноатомных частиц, поскольку поступательное движение сводится к движению центра масс системы. Однако наличие у таких молекул внутренних степеней свободы (форм движения или мод) приводит к независимому вкладу энергий, приходящихся на эти моды, в общую энергию молекулы, а, следовательно, и в полную среднюю энергию газа. Это в свою очередь должно учитываться при определении таких параметров, как температура и теплоемкость газов, а также величин, связанных с переносом тепловой энергии в газе (теплопроводность).

Вращательное движение молекул иногда описывается с помощью некоторых классических моделей молекул – твердых тел («шероховатые» и «нагруженные» сферы, сферо-цилиндры и т.д. [2]). Более общим и эффективным оказывается использование *полуклассического метода* описания, когда функция распределения  $f_i = f(\mathbf{v}, E_i)$  предполагается зависящей от скорости поступательного движения молекулы  $\mathbf{v}$  и от дискретных значений ее внутренней энергии  $E_i$ . Конкретный вид спектра этих значений энергии для вращательных и колебательных мод определяется методами квантовой механики.

Вывод выражения для функции распределения в случае равновесного состояния газа, молекулы которого обладают внутренними степенями свободы, может быть осуществлен тем же способом, который применялся выше при выводе максвелловской функции распределения по скоростям. Использование принципа детального равновесия приводит в этом случае к соотношению

$$f_i(\mathbf{v})f_j(\mathbf{v}_1) = f_k(\mathbf{v}')f_\ell(\mathbf{v}'_1) , \quad (1.38)$$

где индексы  $i, j$  и  $k, \ell$  отвечают дискретным значениям энергии сталкивающихся молекул до и после столкновения соответственно. Из этого соотношения следует, что величина  $\ln f_i$  должна быть аддитивным инвариантом и может быть выражена через линейную комбинацию трех величин, сохраняющихся в столкновениях молекул

$$\ln f_i = \alpha_0 m + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot m\mathbf{v} + \alpha_2 \left( \frac{1}{2} m v^2 + E_i \right) . \quad (1.39)$$

Из соотношения (1.38) следует, что коэффициенты  $\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}_1$  и  $\alpha_2$  оказываются одинаковыми для любых  $i$ .

В отличие от случая одноатомных молекул здесь существенно то, что в столкновениях сохраняется полная энергия молекул, равная сумме ее кинетической энергии  $mv^2/2$  и внутренней энергии  $E_i$ . Коэффициенты  $\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}_1$  и  $\alpha_2$  находятся из условий, определяющих плотность  $n$  и среднюю энергию единицы объема газа  $n\langle E \rangle$ . Если  $\mathbf{u} = 0$ , эти условия записываются как

$$n = \sum_i \int f_i d\mathbf{v} , \quad n\langle E \rangle = \sum_i \int \left( \frac{1}{2} m v^2 + E_i \right) d\mathbf{v} \quad (1.40)$$

и соответствующая функция распределения принимает вид

$$f(\mathbf{v}, E_i) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{Q} \exp \left( - \frac{m}{2kT} v^2 - \frac{E_i}{kT} \right) \quad (1.41)$$

или

$$f(\mathbf{v}, E_i) = f^M(\mathbf{v}) \frac{1}{Q} \exp \left( - \frac{E_i}{kT} \right) . \quad (1.41')$$

Величина

$$Q = \sum_i \exp \left( - \frac{E_i}{kT} \right) \quad (1.42)$$

имеет смысл *статистической суммы* по внутренним степеням свободы частиц, которая вводится, в частности, в статистической физике при использовании так называемого *распределения Гиббса* [3].

Функция распределения  $f(\mathbf{v}, E_i)$  записывается, таким образом, в виде произведения обычной максвелловской функции распределения по скоростям и больцмановского распределения по внутренним состояниям молекулы. При одновременном учете вращательных и колебательных степеней свободы молекул, когда можно пренебречь их взаимодействием между собой, энергию  $i$ -го уровня можно представить как

$$E_{J,v} = E_J + E_v ,$$

где  $J$  соответствует вращательному, а  $v$  – колебательному квантовому числу. При этом статистическая сумма  $Q$  записывается в виде произведения

$$Q = Q^{rot} Q^{vib} .$$

Статистические суммы для вращательных (*rot*) и колебательных (*vib*) степеней свободы определяются выражениями

$$Q^{rot} = \sum_J (2J+1) \exp \left( - \frac{E_J}{kT} \right) , \quad Q^{vib} = \sum_v \exp \left( - \frac{E_v}{kT} \right) . \quad (1.43)$$

В первом из этих выражений учитывается так называемое *вырождение* по вращательным степеням свободы. Коэффициент

$g_J = 2J + 1$  определяет число состояний с одной и той же энергией и носит название *кратности вырождения* или *статистического веса*.

Определение средней энергии единицы объема газа  $n\langle E \rangle$  (1.40) подразумевает, что она представляет собой сумму вкладов от поступательных или транспортных (*tr*) и внутренних (*int*) степеней свободы молекул

$$n\langle E \rangle = n\langle E^{tr} \rangle + n\langle E^{int} \rangle, \quad (1.44)$$

где

$$n\langle E^{tr} \rangle = \frac{3}{2}nkT = \frac{3}{2}p, \quad n\langle E^{int} \rangle = n \frac{\sum_i E_i \exp(-E_i / kT)}{\sum_i \exp(-E_i / kT)}. \quad (1.45)$$

Введем безразмерные переменные

$$\varepsilon_i = \frac{E_i}{kT}, \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{\langle E^{int} \rangle}{kT} = \frac{\sum_i \varepsilon_i \exp(-\varepsilon_i)}{\sum_i \exp(-\varepsilon_i)}. \quad (1.46)$$

Тогда для средней энергии единицы объема газа имеем

$$n\langle E \rangle = nkT \left( \frac{3}{2} + \langle \varepsilon(T) \rangle \right). \quad (1.47)$$

Это важное соотношение является фактическим определением температуры в случае газа, молекулы которого обладают внутренними степенями свободы.

При одновременном учете вращательных и колебательных степеней свободы выражение (1.47) принимает вид

$$n\langle E \rangle = nkT \left( \frac{3}{2} + \langle \varepsilon^{rot}(T) \rangle_{rot} + \langle \varepsilon^{vib}(T) \rangle_{vib} \right), \quad (1.48)$$

где усреднение в выражениях для  $\langle \varepsilon \rangle$  производится независимо по вращательному и колебательному спектрам молекул.

### 1.10. Теплоемкость идеальных газов

Важной характеристикой газа является его теплоемкость. Теплоемкостью тела, как известно, называется величина, равная количеству тепла, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один градус. При ее определении удобно исходить из записанного в дифференциальной форме первого закона термодинамики

$$d'Q = dU + pdV, \quad (1.49)$$

из которого следует, что подводимое к телу тепло  $Q$  расходуется на изменение его внутренней энергии  $U$  и производство работы, связанной с изменением объема тела. Штрих при дифференциале  $d'Q$  означает, что интеграл от этой величины нельзя представить в виде разности конечного и начального значений, в отличие от  $dU$ , который является полным дифференциалом. Теплоемкость одного моля обозначается большой буквой  $C$ , при этом

$$C = \frac{d'Q}{dT}. \quad (1.50)$$

Часто используются также значения удельных теплоемкостей, определяемых как отношение молярной теплоемкости к молекулярной массе газа ( $c = C/M$ ).

Заметим, что под внутренней энергией тела  $U$  в термодинамике подразумевается энергия, приходящаяся как на поступательные, так и на внутренние степени свободы составляющих его молекул. Для идеального газа внутренняя энергия одного моля определяется тогда как

$$U = N_A \langle E \rangle = RT \left( \frac{3}{2} + \langle \varepsilon(T) \rangle \right). \quad (1.51)$$

Введем значения молярных теплоемкостей при постоянном объеме и постоянном давлении  $C_V$  и  $C_p$ . При этом на основании (1.49) и уравнения состояния газа (1.6) имеем

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad C_p = C_V + R. \quad (1.52)$$

Для той части теплоемкости, которая определяется энергией, приходящейся на поступательные или транспортные ( $tr$ ) степени свободы молекул, получаем

$$C_V^{tr} = \frac{3}{2}R \quad , \quad C_p^{tr} = \frac{5}{2}R \quad . \quad (1.53)$$

Именно такие значения имеют классические теплоемкости газа одноатомных молекул. Вклад в теплоемкость  $C_V$ , связанный с внутренними ( $int$ ) степенями свободы молекул, определяется выражением [2]

$$C_V^{int} = R \frac{d}{dT} T \langle \varepsilon(T) \rangle = R \left[ \langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon \rangle^2 \right] , \quad (1.54)$$

где усреднение, как и в выражении (1.46) для  $\langle \varepsilon \rangle$ , производится по дискретному спектру значений внутренней энергии молекул. При учете вращательных и колебательных степеней свободы молекул имеем

$$C_V = C_V^{tr} + C_V^{rot} + C_V^{vib} \quad , \quad (1.55)$$

где

$$C_V^{rot} = R \left[ \langle \langle \varepsilon^{rot} \rangle_{rot}^2 \rangle - \langle \varepsilon^{rot} \rangle_{rot}^2 \right] , \quad (1.56)$$

$$C_V^{vib} = R \left[ \langle \langle \varepsilon^{vib} \rangle_{vib}^2 \rangle - \langle \varepsilon^{vib} \rangle_{vib}^2 \right] . \quad (1.57)$$

При конкретных расчетах теплоемкости часто используются простые модели, описывающие внутреннее состояние молекулы. Так, вращательное движение двухатомной молекулы можно представить моделью жесткого ротатора, уровни энергии которого описываются выражением [3]

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) , \quad (1.58)$$

где  $I$  – момент импульса молекулы. Вращательное квантовое число  $J$  принимает при этом значения  $J=0,1,2,\dots$ . Расстояния между уровнями энергии не постоянны и возрастают в арифметической прогрессии.



Простейшей моделью, учитывающей колебательное движение атомов в двухатомной молекуле, является модель гармонического осциллятора, для которой [3]

$$E_v = \hbar\omega_{vib} \left( v + \frac{1}{2} \right), \quad (1.59)$$

где  $\omega_{vib}$  – собственная частота колебаний. Выражение (1.59) справедливо, когда в молекуле возбуждены не слишком высокие колебательные уровни, т.е. для сравнительно малых отклонений атомов от их положений равновесия. В этом случае расстояния между уровнями сохраняются постоянными. Применимость модели можно расширить, если учесть поправки на ангармонизм колебаний. В простейшем случае

$$E_v = \hbar\omega_{vib} \left( v + \frac{1}{2} \right) - B\hbar\omega_{vib} \left( v + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (1.59')$$

где  $B$  – постоянная, зависящая от рода газа.

Рассмотрим сначала вклад в теплоемкость, связанный с вращательными степенями свободы двухатомной молекулы. Заметим, что в соответствии с (1.58) в состоянии с наименьшей энергией  $J=0$  вращения не возбуждены. В состоянии с  $J=1$  имеем  $E_1 = \hbar^2/I$ . Если  $kT \ll E_1$ , то это означает, что средней тепловой энергии молекулы недостаточно для возбуждения вращений, и вклад вращательных степеней свободы молекул в теплоемкость фактически отсутствует. В противоположном случае, когда  $kT \gg E_1$ , возбуждается много вращательных уровней. Это означает, что при вычислении средних значений в выражении для  $C_V^{rot}$  (1.56) основную роль в суммах играют члены с  $J \gg 1$ . Большим значениям  $J$  соответствует переход к квазиклассическому приближению, когда суммирование можно заменить интегрированием. Тогда, используя (1.43) и (1.58), находим

$$Q_{rot} \approx \int_0^{\infty} 2J \exp(-\beta_0 J^2) dJ = \beta_0^{-1}, \quad (1.60)$$

где  $\beta_0 = \hbar^2/2IkT$ .

Вычисление  $\left\langle \left( \varepsilon^{rot} \right)^2 \right\rangle_{rot}$  и  $\left\langle \varepsilon^{rot} \right\rangle_{rot}$  дает

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \varepsilon^{rot} \right)^2 \right\rangle_{rot} &= (Q_{rot})^{-1} \int_0^{\infty} 2J(\beta_0 J^2)^2 \exp(-\beta_0 J^2) dJ = 2 \ , \\ \left\langle \varepsilon^{rot} \right\rangle_{rot} &= (Q_{rot})^{-1} \int_0^{\infty} 2J(\beta_0 J^2) \exp(-\beta_0 J^2) dJ = 1 \ . \end{aligned} \quad (1.61)$$

Подставляя эти значения в формулу (1.56), имеем:  $C_V^{rot} = R$ , что соответствует классическому значению вращательной теплоемкости двухатомной молекулы. Напомним, что в классической теории теплоемкости используется теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы, согласно которой на каждую степень свободы молекулы приходится энергия, равная  $(kT/2)$ . Поступательное движение центра масс молекулы описывается тремя степенями свободы, поэтому соответствующая этому виду движения молярная теплоемкость, как и в случае одноатомного газа, равна  $C_V^{tr} = (3/2)R$ . Для двухатомной молекулы (модель гантели) должно учитываться вращение вокруг взаимно перпендикулярных осей, исключая вращение вокруг собственной оси, соединяющей две материальные точки (атомы), поэтому  $C_V^{rot} = R$  и  $C_V = C_V^{tr} + C_V^{rot} = (5/2)R$ .

В пределе низких температур ( $kT \ll \hbar^2/I$ ), сохраняя в суммах лишь первые члены разложения при  $J = 0, 1$ , получаем

$$C_V^{rot} = 3R \left( \hbar^2 / I kT \right)^2 \exp \left( - \hbar^2 / I kT \right) . \quad (1.62)$$

Если параметр  $I kT / \hbar^2$  стремится к нулю, вклад вращательной составляющей в теплоемкость газа становится исчезающе малым.

В общем случае произвольных температур средние значения  $\left\langle \left( \varepsilon^{rot} \right)^2 \right\rangle_{rot}$  и  $\left\langle \varepsilon^{rot} \right\rangle_{rot}$  можно рассчитать численно. Зависимость

$C_V^{rot} / R$  от параметра  $\beta_0^{-1} = (2IkT/\hbar^2)$  приведена на рис.1.5. [3].

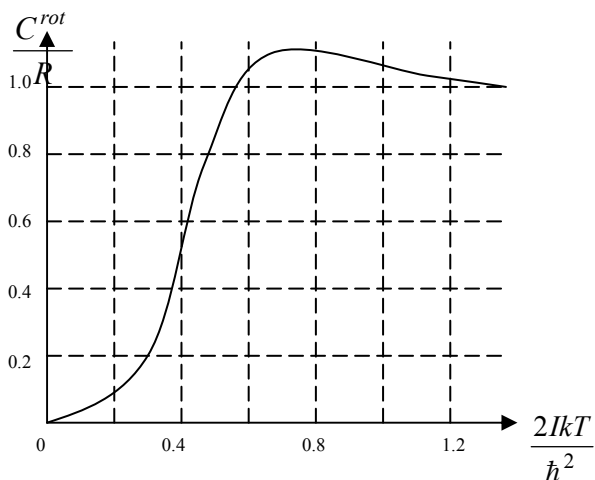


Рис. 1.5

Значения  $\hbar^2/2kI$  относительно велики лишь для легких газов (85,4 К для  $\text{H}_2$  и 43,0 К для  $\text{D}_2$ ). Для  $\text{N}_2$  и  $\text{O}_2$ , например, они равны соответственно 2,9 К и 2,1 К, поэтому при обычных (не очень низких) температурах значения вращательной теплоемкости для них имеют заведомо классические значения.

Рассмотрим теперь вклад колебаний молекул в теплоемкость двухатомного газа. Этот вклад становится заметным при температурах, более высоких, чем те, которые характерны для вращательной составляющей теплоемкости. Это связано со значительно большим значением кванта колебательной энергии (для комнатных температур, как правило,  $\hbar\omega_{\text{vib}} \gg kT$ ). В том интервале температур, где можно пользоваться моделью гармонического осциллятора (1.59), вычисление  $C_V^{\text{vib}}$  оказывается достаточно простым.

Благодаря быстрой сходимости рядов суммирование по  $\nu$  при определении средних значений можно формально распространить до  $\nu \rightarrow \infty$ . Если отсчитывать энергию от наиболее низкого ( $\nu = 0$ ) колебательного уровня, имеем [3]

$$Q^{\text{vib}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{\text{vib}}}{kT} \nu\right) = \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\omega_{\text{vib}}/kT)},$$

$$\begin{aligned} \left\langle (\varepsilon^{vib})^2 \right\rangle_{vib} &= \left( \frac{\hbar\omega_{vib}}{kT} \right)^2 \frac{\exp(\hbar\omega_{vib}/kT) + 1}{(\exp(\hbar\omega_{vib}/kT) - 1)^2}, \\ \left\langle \varepsilon^{vib} \right\rangle_{vib} &= \frac{\hbar\omega_{vib}/kT}{\exp(\hbar\omega_{vib}/kT) - 1}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Выражение для колебательной составляющей теплоемкости принимает в этом случае вид

$$C_V^{vib} = R \left( \frac{\hbar\omega_{vib}}{kT} \right)^2 \frac{\exp(\hbar\omega_{vib}/kT)}{(\exp(\hbar\omega_{vib}/kT) - 1)^2}. \quad (1.64)$$

При низких температурах ( $kT \ll \hbar\omega_{vib}$ )

$$C_V^{vib} = R \left( \frac{\hbar\omega_{vib}}{kT} \right)^2 \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{vib}}{kT}\right). \quad (1.65)$$

Из формулы (1.65) следует, что при выполнении условия  $kT \ll \hbar\omega_{vib}$ , величина  $C_V^{vib}$  становится очень малой. Фактически это означает, что средняя тепловая энергия молекулы оказывается недостаточной, чтобы возбудить осциллятор, т.е. перевести его с нулевого ( $v=0$ ) на ближайший ( $v=1$ ) энергетический уровень. Возбуждение будет происходить только при столкновениях с молекулами, энергия которых значительно больше, чем средняя тепловая. Однако таких молекул относительно мало. В результате практически все осцилляторы останутся на низшем колебательном уровне. Таким образом, вкладом колебательной составляющей в полную теплоемкость газа при этих условиях можно практически пренебречь.

При высоких температурах ( $kT \gg \hbar\omega_{vib}$ ) значение колебательной теплоемкости стремится к классическому пределу  $C_V^{vib} = R$ . Это значение находится в соответствии с теоремой о равнораспределении энергии по степеням свободы, поскольку при гармонических колебаниях должна учитываться энергия, соответствующая как кинетической, так и потенциальной энергии колебаний атомов в молекуле. Средние значения этих энергий оказываются одинаковыми и равными ( $kT/2$ ). Учет двух колебательных степеней свободы и дает классическое значение молярной колебательной тепло-

емкости при постоянном объеме  $C_V^{vib} = N_A k = R$  для двухатомных газов. Зависимость  $C_V^{vib} / R$  от параметра  $kT / \hbar \omega_{vib}$  приведена на рис. 1.6.

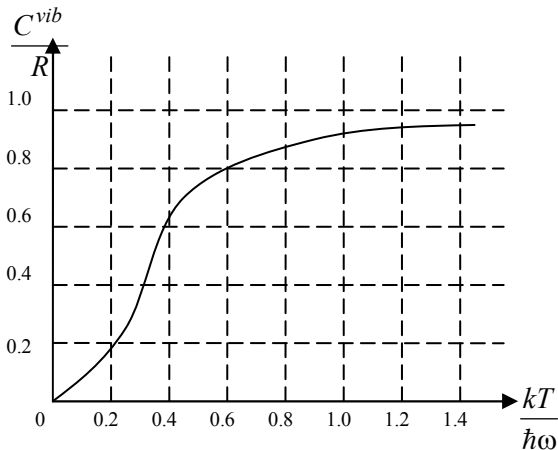


Рис. 1.6

Наконец, рассмотрим кратко вопрос о теплоемкости многоатомных газов. Молекула с тремя и более атомами обладает тремя вращательными степенями свободы и характеризуется в общем случае тремя главными моментами инерции  $I_1, I_2$  и  $I_3$ . Большое значение моментов инерции (и соответственно малое значение квантов вращательной энергии) позволяет при обычных температурах рассматривать вращение молекул как классическое. Применение теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы приводит в этом случае к результату:  $C_V^{rot} = (3/2)R$ . Для линейных молекул (независимо от числа атомов), обладающих, как и двухатомная молекула, лишь двумя вращательными степенями свободы и одним моментом инерции  $I$ , результат расчета будет таким же, как у двухатомного газа, т.е. классическое значение вращательной теплоемкости  $C_V^{rot} = R$ .

При определении колебательной составляющей теплоемкости многоатомного газа, учитывается, что для колебаний, описываемых моделью гармонического осциллятора, колебательную энергию

молекулы можно представить в виде суммы энергий так называемых нормальных колебаний, каждое из которых характеризуется собственной частотой  $\omega_k$ . В результате значение  $C_V^{vib}$  получается суммированием по всем колебательным модам.

$$C_V^{vib} = R \sum_k \left( \frac{\hbar \omega_k}{kT} \right)^2 \frac{\exp(\hbar \omega_k / kT)}{(\exp(\hbar \omega_k / kT) - 1)^2} . \quad (1.66)$$

В классическом пределе ( $kT \gg \hbar \omega_k$ ) каждое из нормальных колебаний дает вклад в теплоемкость, равный  $C_k^{vib} = R$ , поэтому  $C_V^{vib} = rR$ , где  $r$  – число колебательных степеней свободы. Для нелинейной молекулы, состоящей из  $n$  атомов,  $r = 3n - 6$ , для линейной  $n$ - атомной молекулы  $r = 3n - 5$ .

### 1.11. Газовая смесь

Все обсуждавшиеся выше равновесные свойства простого (однокомпонентного) газа легко обобщаются на случай газовой смеси из  $N$  компонентов. При этом можно ввести функцию распределения молекул каждого из компонентов  $f_\alpha(\mathbf{v})$ , нормированную на числовую плотность компонента  $\alpha$

$$\int f_\alpha(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = n_\alpha . \quad (1.67)$$

Числовая плотность смеси  $n$  определяется при этом простым суммированием

$$n = \sum_\alpha n_\alpha . \quad (1.68)$$

В некоторых случаях полезно использовать также определение массовой плотности компонента  $\alpha$

$$\rho_\alpha = n_\alpha m_\alpha , \quad (1.69)$$

где  $m_\alpha$  – масса молекулы сорта  $\alpha$ . Массовая плотность смеси в целом определяется выражением

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha . \quad (1.70)$$

Для газовой смеси, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, функция распределения  $f_\alpha$  по скоростям оказывается максвелловской функцией распределения вида

$$f_\alpha^M(c_\alpha) = n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_\alpha}{2kT} c_\alpha^2 \right], \quad \mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}. \quad (1.71)$$

Вид этой функции можно установить тем же способом, что и в случае простого газа, используя принцип детального равновесия, который записывается для переходов из одних скоростных интервалов в другие для парных столкновений как одинаковых, так и различающихся частиц.

Средняя кинетическая энергия компонента  $\alpha$ , определяемая в системе отсчета, движущейся со скоростью  $\mathbf{u}$ , записывается как

$$\langle E_\alpha^{tr} \rangle = \frac{\int (m_\alpha c^2 / 2) f_\alpha^M d\mathbf{c}}{\int f_\alpha^M d\mathbf{c}} = \frac{3}{2} kT. \quad (1.72)$$

Средние кинетические энергии хаотического движения частиц у всех компонентов смеси в равновесии оказываются одинаковыми, что является частным случаем классической теоремы статистической механики о равномерном распределении энергии по степеням свободы частиц. Этим, в частности, объясняется тот факт, что в выражении для равновесной функции распределения (1.71) для любого компонента смеси фигурирует одна и та же температура  $T$ .

В состоянии равновесия одно и то же значение для всех компонентов смеси имеет и макроскопическая скорость компонентов  $\mathbf{u}_\alpha$ . Если определить последнюю с помощью выражения

$$n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v}, \quad (1.73)$$

то, подставляя в (1.73) функцию распределения (1.71), получаем  $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  – макроскопическая скорость движения газовой смеси как целого.

Давление  $p_\alpha$ , которое создает в газе каждый компонент смеси, определяется выражением

$$p_\alpha = 2m_\alpha \int (v_x^+)^2 f_\alpha^M(v) dv. \quad (1.74)$$

Используя для  $f_\alpha(v)$  выражение (1.71) и производя вычисления, аналогичные выполненным в параграфе 1.7, получаем

$$p_\alpha = \frac{2}{3} n_\alpha \langle E_\alpha^{tr} \rangle = n_\alpha kT . \quad (1.75)$$

Полное давление в газе определяется уравнением состояния

$$p = nkT = \sum_\alpha n_\alpha kT , \quad (1.76)$$

где использовано определение числовой плотности смеси (1.68).

В результате

$$p = \sum_\alpha p_\alpha , \quad (1.77)$$

что соответствует закону Дальтона (1.8).

Для газовой смеси, молекулы которой обладают внутренними степенями свободы, равновесная функция распределения компонента  $\alpha$  по скоростям и внутренним энергиям молекул принимает вид

$$f_\alpha(\mathbf{c}, E_{\alpha i}) = n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{Q_\alpha} \exp\left( -\frac{m_\alpha}{2kT} c^2 - \frac{E_{\alpha i}}{kT} \right) , \quad (1.78)$$

где

$$Q_\alpha = \sum_i \exp(-E_{\alpha i}/kT) .$$

Средняя энергия единицы объема смеси  $n\langle E \rangle$  определяется суммированием соответствующих энергии поступательного и внутреннего движения молекул по всем компонентам смеси

$$n\langle E \rangle = \sum_\alpha n_\alpha \left( \langle E_\alpha^{tr} \rangle + \langle E_\alpha^{int} \rangle \right) = \frac{3}{2} nkT + kT \sum_\alpha n_\alpha \langle \varepsilon_\alpha \rangle , \quad (1.79)$$

где

$$\langle \varepsilon_\alpha \rangle = \frac{\langle E_\alpha^{int} \rangle}{kT} = \frac{\sum_i \varepsilon_{\alpha i} \exp(-\varepsilon_{\alpha i})}{\sum_i \exp(-\varepsilon_{\alpha i})} . \quad (1.80)$$

В силу аддитивности вкладов от каждого из компонентов в полную среднюю энергию смеси полная молярная теплоемкость смеси при постоянном объеме определяется выражением



$$C_V = C_V^{tr} + C_V^{int} = R \left( \frac{3}{2} + \sum_{\alpha} \left( \langle \varepsilon_{\alpha}^2 \rangle - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle^2 \right) \right). \quad (1.81)$$

Разбиение теплоемкости каждого из компонентов смеси, соответствующей внутренним степеням свободы, на вращательную и колебательную составляющие и их конкретный расчет производятся тем же способом, как и в обсуждавшемся выше случае простого газа.

### 1.12. Локально-равновесные распределения

Рассматривавшиеся до сих пор максвелл-больцмановские распределения по скоростям и внутренним энергиям молекул относились к так называемым *абсолютным распределениям*, которые устанавливаются в газе по истечении достаточно большого промежутка времени. В этом случае параметры равновесных распределений: плотность  $n$ , макроскопическая скорость  $\mathbf{u}$  и температура  $T$  оказываются постоянными, т.е. не зависящими от времени и координаты. Наряду с этим в определенных условиях в газе могут существовать так называемые *локально-равновесные распределения*. Возможность их реализации связана с существованием по крайней мере двух характерных временных масштабов. Один из них – это время установления равновесия в системе, зависящее от ее объема, другой – значительно меньшее время релаксации, характеризующее установление равновесия в *макроскопически малом* объеме. Идеальный (разреженный) газ оказывается типичным примером такой ситуации, поскольку для характерных времен в нем выполняются условия (1.5). Процесс установления равновесия в пространстве скоростей для такого газа существенно отличается от установления равновесия в координатном пространстве. Так, например, для простого одноатомного газа распределение по скоростям в любом элементе координатного пространства достаточно быстро (за время порядка среднего времени между столкновениями  $\tau$ ) стремится к локальному распределению Максвелла вида

$$f^M(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) \left( \frac{m}{2\pi kT(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \exp \left[ - \frac{m}{2kT(\mathbf{r}, t)} (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t))^2 \right], \quad (1.82)$$

параметры которого зависят от времени и координат. Аналогичная зависимость возникает в локально-равновесных распределениях

для газов, молекулы которых обладают внутренними степенями свободы. В этом случае функция распределения определяется формулой (1.41) (для газовой смеси – формулой (1.78)), но с параметрами распределений, зависящими от  $\mathbf{r}$  и  $t$ .

Определяющим фактором в установлении локально-равновесных распределений является наличие малого параметра – отношения среднего времени между столкновениями  $\tau$  к характерному времени задачи  $\tau_L$ . В случае пространственно-неоднородных состояний в роли малого параметра выступает также отношение средней длины свободного пробега молекул  $\lambda$  к характерному размеру задачи  $L$  или число Кнудсена ( $Kn = (\lambda/L)$ ). При теоретическом анализе этой ситуации такие распределения возникают как результат применения теории возмущений к решению кинетического уравнения Больцмана с использованием малого параметра  $\varepsilon$ , который, по существу, совпадает с числом Кнудсена. Локальное распределение (1.82) соответствует нулевому приближению по параметру  $\varepsilon$ , а его параметры  $n(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и  $T(\mathbf{r}, t)$  в этом приближении, как можно показать, удовлетворяют системе уравнений Эйлера (или уравнениям гидродинамики идеальной жидкости [4])

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{u} = 0, \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial \rho\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (p + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = 0, \quad (1.84)$$

$$\frac{\partial n\langle E \rangle}{\partial t} + p\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (n\langle E \rangle\mathbf{u}) = 0. \quad (1.85)$$

Здесь  $\rho = mn$  – массовая плотность газа,  $n\langle E \rangle$  – средняя энергия единицы объема газа.

Уравнения (1.83) – (1.85) называются соответственно *уравнениями непрерывности, движения и энергии*. Они представляют собой частную форму записи уравнений баланса массы, импульса и энергии среды или так называемых уравнений сохранения, в которых полностью пренебрегается процессами диссипации энергии в движущемся газе (жидкости) вследствие внутреннего трения (вязкости) и обмена теплом между его различными участками (теплопро-

водности). Мы еще вернемся к обсуждению общего вида уравнений сохранения в главе 3.

Для рассматриваемого нами идеального газа уравнения (1.83)–(1.85) должны быть дополнены уравнением состояния  $p = nkT$ . Для одноатомного газа, кроме того,  $\langle E \rangle = (3/2)kT$ . С учетом уравнения непрерывности уравнения Эйлера можно представить тогда в виде

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} + n \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, & \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p &= 0, \\ \frac{3}{2} nk \frac{dT}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1.86)$$

где  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  – оператор субстанциональной производной по времени.

Напомним, что в гидродинамике понятие *идеальной жидкости* носит несколько иной смысл, чем введенное ранее понятие идеального газа. Речь в этом случае идет о том, что уравнения Эйлера записываются в приближении, когда можно пренебречь всеми диссипативными процессами в газе [4].

Используя еще раз уравнение непрерывности, можно представить третье уравнение (1.86) как

$$\frac{d}{dt} (nT^{-3/2}) = 0, \quad (1.87)$$

из которого следует уравнение адиабаты одноатомного идеального газа

$$nT^{-3/2} = \text{const}. \quad (1.87')$$

Нетрудно показать, что в общем случае двухатомного или многоатомного газов из уравнения энергии (1.85) с учетом выражения для  $n\langle E \rangle$  (1.47) и уравнения состояния (1.7) следует известное уравнение адиабаты вида

$$pn^{-\gamma} = \text{const}, \quad (1.88)$$

где  $\gamma = C_p/C_V$  – показатель адиабаты.

### 1.13. Установление равновесия в газе с внутренними степенями свободы молекул

В случае газа, молекулы которого обладают внутренними степенями свободы, процесс установления локально-равновесных распределений в газе имеет свои особенности. Для большинства двухатомных (исключая  $H_2$  и  $D_2$ ), а также многоатомных газов при умеренных температурах характерное время обмена энергией между вращательными и поступательными степенями свободы молекул  $\tau_{RT}$  ненамного превышает характерное время установления равновесия по поступательным степеням свободы  $\tau_{TT}$ , которое, в свою очередь, имеет порядок величины среднего времени свободного пробега молекул  $\tau$ .

Из-за относительно малого значения кванта вращательной энергии (на нижних вращательных уровнях) для возбуждения вращения молекул достаточно в среднем лишь несколько столкновений. С ростом температуры газа начинают возбуждаться колебательные степени свободы молекул, однако, для их возбуждения необходимо, как правило, несколько тысяч или даже десятков тысяч столкновений. В связи с этим характерное время обмена энергией между колебательными и поступательными степенями свободы  $\tau_{VT}$  на несколько порядков больше, чем соответствующее время поступательной релаксации. Таким образом, для характерных времен наряду с обычными неравенствами (1.5) имеют место неравенства

$$\tau \approx \tau_{TT} \leq \tau_{RT} \ll \tau_{VT}. \quad (1.89)$$

Достаточно «легкий» обмен энергией между вращательными и поступательными степенями свободы молекул приводит к тому, что локально-равновесное распределение в той области температур, где колебательные степени свободы еще не возбуждены, принимает вид

$$f_J = n(\mathbf{r}, t) \left( \frac{m}{2\pi kT(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \frac{1}{Q^{rot}(\mathbf{r}, t)} \exp \left[ \frac{1}{kT(\mathbf{r}, t)} \left( \frac{mv^2}{2} + E_J \right) \right]. \quad (1.90)$$

Это соответствует представлению о том, что в случае легкого обмена энергией аддитивным инвариантом столкновений наряду с  $m$

и  $mv$  является полная энергия молекулы  $(mv^2/2) + E_J$ . В свою очередь это приводит к появлению одной (поступательно-вращательной) температуры  $T$  в распределении (1.90).

Если в газе возбуждены колебательные степени свободы, то из-за «затрудненного» обмена энергией между поступательными и колебательными степенями свободы можно считать дополнительными к  $m$  и  $mv$  аддитивными инвариантами столкновений отдельно поступательно-вращательную и колебательную энергию молекул. В этом случае вместо условия (1.31) для логарифма функции распределения имеем

$$\ln f_{J,v} = \alpha_0 m + \alpha_1 \cdot mv + \alpha_2 \left( \frac{mv^2}{2} + E_J \right) + \alpha_3 E_v . \quad (1.91)$$

Выражение для функции распределения принимает тогда вид [2]

$$f_{J,v} = n(\mathbf{r}, t) \left( \frac{m}{2\pi kT^{tr}(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \frac{1}{Q^{rot}(\mathbf{r}, t) Q^{vib}(\mathbf{r}, t)} \times \\ \times \exp \left[ \frac{1}{kT^{tr}(\mathbf{r}, t)} \left( \frac{mv^2}{2} + E_J \right) + \frac{1}{kT^{vib}(r, t)} E_v \right] . \quad (1.92)$$

Мы получаем в результате двухтемпературное распределение Максвелла-Больцмана. Поступательная температура  $T^{tr}$  (равная вращательной) и колебательная температура  $T^{vib}$  определяются при этом условиями

$$\langle E^{tr} \rangle + \langle E^{rot} \rangle = kT^{tr} \left( \frac{3}{2} + \langle \varepsilon^{rot}(T^{tr}) \rangle_{rot} \right) , \\ \langle E^{vib} \rangle = kT^{vib} \langle \varepsilon^{vib}(T^{vib}) \rangle_{vib} . \quad (1.93)$$

Наличие двух различающихся температур в распределении (1.92) приводит к тому, что уравнение энергии (1.85) в уравнениях Эйлера должно быть заменено двумя уравнениями релаксации энергии поступательных и внутренних степеней свободы или соответствующих им температур. В частности, для рассматриваемого нами двухтемпературного распределения (1.92) уравнение релаксации колебательной энергии может быть представлено в виде [2]

$$n \frac{d\langle E^{vib} \rangle}{dt} = \frac{nc_V^{vib}}{\tau_{VT}} (T^{vib} - T^{tr}) , \quad (1.94)$$

где  $\tau_{VT}$  – характерное время обмена энергией между поступательными и колебательными степенями свободы молекул. По истечении времени  $\tau_{rel}$ , заметно большего, чем  $\tau_{VT}$ , температуры  $T^{tr}$  и  $T^{vib}$  выравниваются. Однако в течение времени  $\tau_{VT} \gg \tau_{RT} \approx \tau_{rel}$  в газе может сохраняться состояние неполного (заторможенного) равновесия с  $T^{tr} \neq T^{vib}$ . Как мы увидим впоследствии, нечто подобное наблюдается и в случае неизотермической плазмы с температурой электронов, отличающейся от температуры тяжелых частиц (атомов и ионов).

#### 1.14. Распространение звука в газе

Представленные в предыдущем разделе уравнения непрерывности и движения (1.83) вместе с уравнением адиабаты (1.88) могут быть использованы для анализа распространения слабых возмущений плотности и давления в среде, в частности для определения скорости звуковой волны в газе. Рассмотрим случай, когда эти слабые возмущения носят характер гармонических колебаний малой амплитуды. Представим параметры возмущенного газа в виде

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n' \exp[i(kx - \omega t)] , \\ p &= p_0 + p' \exp[i(kx - \omega t)] , \\ u &= u' \exp[i(kx - \omega t)] , \end{aligned} \quad (1.95)$$

где  $n_0$  и  $p_0$  – плотность и давление невозмущенной среды. При этом газ в целом предполагается покоящимся ( $u_0 = 0$ ), малые величины  $n'$ ,  $p'$  и  $u'$  отвечают отклонению от равновесия.

В выражениях (1.95)  $\omega$  – частота колебаний, а  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число, где  $\lambda$  – длина волны, распространяющейся в газе. Фазовая скорость звуковой волны определяется очевидным соотношением

$$v_a = \frac{\omega}{k} . \quad (1.96)$$

При условии малости величины  $u$  первые два уравнения (1.86) для одномерного случая можно представить в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 . \quad (1.97)$$

Подстановка (1.95) в (1.97) приводит к соотношениям

$$\omega n' = kn_0 u' , \quad \rho_0 \omega u' = kp' , \quad (1.98)$$

где слева и справа опущены возникающие при дифференцировании множители  $\exp[i(kx - \omega t)]$ .

Для малых возмущений плотности и давления может быть также линеаризовано уравнение адиабаты (1.88), что приводит к соотношению

$$\frac{p'}{p_0} = \gamma \frac{n'}{n_0} . \quad (1.99)$$

Заменяя  $n'$  в первом уравнении (1.98) с помощью (1.99), получаем

$$\omega \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{p_0} = k u' .$$

Выражая  $u'$  с помощью второго уравнения (1.98), находим

$$\left( \frac{\omega}{k} \right)^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma \frac{p}{\rho} .$$

Тогда в соответствии с (1.96) для скорости распространения звуковой волны в газе приходим к известному выражению

$$v_a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} . \quad (1.100)$$

Как видно, скорость распространения звука в газе имеет тот же порядок величины, что и средняя тепловая скорость молекул  $\langle v \rangle$ . Это представляется вполне естественным, поскольку передача возмущений в звуковой волне как раз и осуществляется молекулами, движущимися с тепловыми скоростями.

## ГЛАВА 2. ПЛАЗМА

Плазма – *частично или полностью ионизованный газ*, образованный из нейтральных атомов (или молекул) и заряженных частиц (ионов и электронов). Газ переходит в состояние плазмы, если некоторые из составляющих его атомов (молекул) по какой-либо причине лишились одного или нескольких электронов, т.е. превратились в положительные ионы. В некоторых случаях в плазме в результате “прилипания” электронов к нейтральным атомам могут возникать и отрицательные ионы. Если в газе фактически не остается нейтральных частиц, плазма становится полностью ионизованной.

Важнейшей особенностью плазмы является ее *квазинейтральность*: это означает, что объемные плотности положительных и отрицательных заряженных частиц, из которых она образована, оказываются почти одинаковыми. Ключевым здесь является слово “почти”, подробней о смысле понятия квазинейтральности плазмы будет сказано ниже.

Между газом и плазмой нет резкого перехода. Любое вещество, находящееся первоначально в твердом состоянии, по мере возрастания температуры начинает плавиться, переходя в жидкое состояние, а при дальнейшем нагревании испаряется, т.е. превращается в газ. Если это молекулярный газ (например, водород или азот), то с повышением его температуры происходит распад молекул газа на отдельные атомы (диссоциация). При еще более высокой температуре газ ионизуется, в нем появляются положительные ионы и свободные электроны. Известно, что фазовые переходы между твердым телом и жидкостью, между жидкостью и газом происходят обычно скачком, в отличие от них переход к ионизованному состоянию оказывается непрерывным.

Так называемая *идеальная плазма* (см. ниже) фактически подчиняется газовым законам и во многих отношениях ведет себя как *идеальный газ*. Вместе с тем, поведение плазмы в ряде случаев, особенно при воздействии на нее электрических и магнитных полей, оказывается столь необычным, что о ней часто говорят как о новом *четвертом состоянии вещества*. В 1879 г. английский физик *В. Крукс*, изучавший электрический разряд в трубках с разреженным воздухом, писал: “Явления в откаченных трубках откры-



вают для физической науки новый мир, в котором материя может существовать в четвертом состоянии”. Сам термин “плазма” применительно к квазинейтральному ионизованному газу был введен американскими физиками *Лэнгмюром и Тонксом* в 1923 г. при описании явлений в газовом разряде.

Проявление новых свойств плазмы по сравнению с описанными выше свойствами нейтрального газа определяется несколькими важными обстоятельствами. Одно из них связано со специфическим характером *кулоновского взаимодействия* заряженных частиц плазмы, которое является дальнедействующим, т.е. убывающим с расстоянием значительно медленнее, чем короткодействующие силы взаимодействия нейтральных частиц. Каждая заряженная частица создает вокруг себя протяженное электрическое поле, в сферу действия которого попадают многие другие заряженные частицы. Благодаря этому, помимо обычных парных взаимодействий частиц важную, часто решающую, роль в плазме приобретают *коллективные эффекты*, связанные с одновременным взаимодействием многих частиц. Проявлением этих коллективных процессов являются многочисленные неустойчивости, самопроизвольно развивающиеся шумы и колебания, а также специфические нелинейные эффекты, возникающие в плазме.

Другие отличия свойств плазмы от свойств газа проявляются при воздействии на заряженные частицы плазмы электрических и магнитных полей. Электрическое поле по-разному действует на электронный и ионный компоненты плазмы. Приобретая ускорение в период между столкновениями, электроны при упругих столкновениях с ионами и нейтральными атомами передают лишь незначительную часть своей энергии (за счет малого отношения массы электрона к массе тяжелых частиц). В результате электронный компонент плазмы может приобрести в среднем более высокую энергию, чем остальные компоненты (ионы и атомы). В плазме могут возникать квазиравновесные состояния, в которых каждому компоненту плазмы соответствует как бы своя температура, которая является мерой средней энергии хаотического движения частиц разного сорта. Под действием электрического поля в плазме могут возникать области объемных зарядов и токи, которые вызывают ряд своеобразных эффектов, также невозможных в обычном нейтральном газе.

Как известно, в магнитном поле на заряженные частицы действует *сила Лоренца*, перпендикулярная как магнитному полю, так и скорости частицы. Такое воздействие приводит к закручиванию траекторий заряженных частиц вокруг силовых линий магнитного поля. В зависимости от конкретных параметров плазмы с этим связан целый ряд новых эффектов, например таких, как дрейф заряженных частиц в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям, дрейф в неоднородном магнитном поле, анизотропия коэффициентов переноса в плазме и ряд других явлений.

## **2.1. Методы получения плазмы**

Способ создания плазмы в лабораторных условиях путем обычного нагрева вещества не является самым распространенным. Для того чтобы получить термическим путем полную ионизацию плазмы, большинство газов необходимо нагреть до температур в десятки и даже сотни тысяч градусов. Только в парах щелочных металлов (таких, например, как калий или цезий) электрическую проводимость газа можно заметить уже при 2000–3000°K. Это связано с тем обстоятельством, что в атомах одновалентных щелочных металлов электрон внешней оболочки гораздо слабее связан с ядром, чем в атомах других элементов периодической системы элементов (т.е. обладает более низкой энергией ионизации). В таких газах при указанных выше температурах число ионизирующих частиц, энергия которых оказывается выше *порога ионизации*, оказывается достаточным для создания *слабоионизированной плазмы*.

Наиболее общепринятым методом получения плазмы в лабораторных условиях и технике является использование *электрического газового разряда*. Газовый разряд возникает в газовом промежутке, к которому приложена разность потенциалов. Внутри промежутка образуются заряженные частицы, которые движутся в электрическом поле, т.е. создают ток. Сам процесс ионизации в плазме газового разряда неразрывно связан с прохождением тока и носит характер *ионизационной лавины*. Это означает, что появившиеся в газовом промежутке электроны за время свободного пробега ускоряются электрическим полем и перед столкновением с очередным атомом набирают энергию, достаточную для того, чтобы ионизовать его (т.е. выбить еще один электрон). Таким спосо-

бом происходит размножение электронов в разряде и установление стационарного тока.

Для поддержания тока в плазме необходимо, чтобы отрицательный электрод (катод) испускал в плазму электроны. Эмиссию электронов с катода можно обеспечивать различными способами, например нагреванием катода до достаточно высоких температур (*термоэмиссия*), либо облучением катода каким-либо коротковолновым излучением (рентгеновские лучи,  $\gamma$ -излучение), способным выбивать электроны из металла (*фотоэффект*). Такой разряд, создаваемый внешними источниками, называется *несамостоятельным*.

При достаточно большой разности потенциалов между электродами электронная эмиссия с катода может быть обеспечена и без вспомогательных средств. Такой вид разряда называется *самостоятельным*. К самостоятельным разрядам относятся *искровой*, *дуговой* и *тлеющий разряды*, которые принципиально отличаются друг от друга по способам образования электронов у катода или в межэлектродном промежутке. Искровой разряд обычно оказывается прерывистым даже при постоянном напряжении на электродах. При его развитии возникают тонкие искровые каналы (*стримеры*), пронизывающие разрядный промежуток между электродами и заполненные плазмой. Пример одного из наиболее мощных искровых разрядов являет собой молния.

В обычном *дуговом разряде*, который реализуется в довольно плотном газе и при достаточно высоком напряжении на электродах, термоэмиссия с катода возникает чаще всего от того, что катод разогревается падающими на него ускоренными газовыми ионами. Дуговой разряд, возникающий в воздухе между двумя накаленными угольными стержнями, к которым было подведено соответствующее электрическое напряжение, впервые наблюдал в начале XIX в. русский ученый *В.В. Петров*. Ярко светящийся канал разряда принимает форму дуги благодаря действию на сильно нагретый газ архимедовых сил. Дуговой разряд возможен и между тугоплавкими металлическими электродами. С этим связаны многочисленные практические применения плазмы дугового разряда в мощных источниках света, в электродуговых печах для плавки высококачественных сталей, при электросварке металлов, а также в генераторах непрерывной плазменной струи, так называемых *плазмотронах*.

нах. Температура плазменной струи при обычном атмосферном давлении может достигать при этом 7000–20000 К. При общей плотности газа  $n \sim (10^{17} - 10^{18}) \text{ см}^{-3}$  плотность заряженных частиц  $n_e = n_i$  в плазме дугового разряда в зависимости от вводимой в разряд мощности составляет обычно  $\sim 10^{14} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

Различные формы *холодного* или *тлеющего разряда* осуществляются в разрядной трубке при низких давлениях и при не очень высоких напряжениях. В этом случае катод испускает электроны по механизму так называемой *автоэлектронной эмиссии*, когда электрическое поле у поверхности катода просто вытягивает электроны из металла. Газоразрядная плазма, простирающаяся от катодного до анодного участков, на некотором расстоянии от катода образует *положительный столб*, отличающийся от остальных участков разряда относительным постоянством по длине характеризующих его параметров (например, напряженности электрического поля). Светящиеся рекламные трубки, лампы дневного света, покрытые изнутри люминофорами сложного состава, представляют собой многочисленные применения плазмы тлеющего разряда. Тлеющий разряд в плазме молекулярных газов (например, СО и СО<sub>2</sub>) широко используется для создания активной среды газовых лазеров на колебательно-вращательных переходах в молекулах. В тлеющих газовых разрядах низкого давления ( $p \sim 10^{-2} - 10^2$  торр) в области, занятой положительным столбом, температура электронов  $T_e \sim (2 - 3) \cdot 10^4 \text{ К}$  обычно существенно выше, чем температура тяжелых частиц ( $T \sim (3 - 8) \cdot 10^2 \text{ К}$ ). Плотность электронов при этих условиях составляет  $n_e \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ см}^{-3}$  при общей плотности газа в разряде  $n \sim 10^{14} - 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , т.е. такая плазма оказывается *слабоионизованной*.

В установках *управляемого термоядерного синтеза* (УТС) используется высокотемпературная *полностью ионизованная* плазма изотопов водорода: дейтерия и трития (D–T плазма). На первом этапе исследований по УТС нагрев плазмы до высоких температур порядка миллионов градусов осуществлялся самим электрическим током в так называемых самосжимаемых проводящих плазменных шнурах (*омический нагрев*). В тороидальных установках магнитно-

го удержания плазмы типа *токамак* удается нагреть плазму до температур порядка сотен миллионов градусов с помощью *впрыскивания* (инжекции) в плазму высокоэнергетических пучков нейтральных атомов. Другой способ состоит в использовании мощного микроволнового излучения, частота которого равна ионной циклотронной частоте (т.е. частоте вращения ионов в магнитном поле) – это нагрев плазмы методом так называемого *циклотронного резонанса*. При температурах  $D-T$  плазмы  $T = 10^7 - 10^8$  К плотность заряженных частиц в установках магнитного удержания плазмы составляет обычно  $n_e \sim 10^{13} - 10^{14}$  см<sup>-3</sup>.

## 2.2. Параметры космической плазмы

Если в земных условиях плазму приходится, как правило, создавать искусственным путем в многочисленных технических устройствах, то в космосе она является естественным состоянием большинства небесных тел и межзвездной среды. Вещество Вселенной на 90% состоит из заряженных частиц.

Области верхней атмосферы Земли ионизируются ультрафиолетовым излучением Солнца и образуют на высотах свыше 100 км так называемую *ионосферу*. Так, в F-слое ионосферы на высоте от 200 до 300 км при температуре  $(1-2) \cdot 10^3$  К плотность заряженных частиц составляет  $(2-8) \cdot 10^5$  см<sup>-3</sup>, меняясь в зависимости от времени суток.

В околоземном пространстве плазма существует также в виде солнечного ветра, заполняет магнитосферу Земли, простирающуюся на расстояниях 2–5 тыс. км от поверхности нашей планеты, образует радиационные пояса Земли. Плотность заряженных частиц в солнечном ветре составляет всего лишь 5–10 частиц на кубический сантиметр при температуре  $T \sim 10^5$  К. Электроны солнечного ветра, захватываясь геомагнитным полем, могут «высыпаться» в верхние слои атмосферы в приполярных широтах, где их столкновения с молекулами азота и кислорода приводят к их возбуждению с последующим высвечиванием фотонов. Возникающее при этом излучение может наблюдаться в форме полярных сияний.

Многообразными оказываются параметры плазмы, из которой образованы Солнце и звезды. В их внутренних областях при температурах порядка десятка миллионов градусов протекают интенсивные реакции термоядерного синтеза. Так, в центре Солнца температура полностью ионизованной плазмы составляет 16 миллионов градусов при плотности ядер атомов водорода (протонов)  $n_p \sim 10^{26} \text{ см}^{-3}$ . Тонкая область поверхности Солнца толщиной около 1000 км (фотосфера) имеет температуру около 6000 К. Именно эта область обеспечивает основную часть излучения энергии Солнца. Мощным источником ультрафиолетового излучения и стационарного потока протонов (солнечный ветер) является разреженная сильно нагретая область ( $T \sim 10^6 \text{ К}$ ) над поверхностью Солнца, которая называется солнечной короной. Вся межзвездная среда также заполнена плазмой с плотностью заряженных частиц порядка  $(10^2 - 10^4) \text{ см}^{-3}$  при температуре  $T \sim (10 - 10^4) \text{ К}$ .

### 2.3. Идеальный газ и идеальная плазма

Как и в случае идеального газа нейтральных частиц, ниже будет рассматриваться в основном ионизованный газ относительно малой плотности, в котором основную часть времени частицы проводят в свободном движении. Хотя расстояния, на которых взаимодействуют заряженные частицы, являются более протяженными, чем при взаимодействии нейтральных частиц, условие идеальности плазмы выполняется, если потенциальная энергия взаимодействия выделенной частицы с ее окружением (на среднем расстоянии между частицами) оказывается значительно меньшей средней кинетической энергии частицы. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов  $e_1$  и  $e_2$  определяется, как известно, выражением

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r}, \quad (2.1)$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. В системе единиц СИ, когда расстояние между частицами  $r$  измеряется в метрах (м), энергия — в

джоулях (Дж), а единицей заряда является кулон (Кл), численный коэффициент  $(1/4\pi\epsilon_0)$  равен  $9 \cdot 10^9$ .

Как и в случае обычного газа, среднее расстояние между частицами оценим из условия  $\bar{r} \approx n_e^{-1/3}$  где  $n_e$  – числовая плотность электронов, равная, благодаря квазинейтральности плазмы, плотности ионов  $n_i$  (ионы предполагаются однократно заряженными). Потенциальная энергия взаимодействия заряженных частиц на среднем расстоянии между ними равна  $U = (1/4\pi\epsilon_0)e_1e_2n_e^{1/3}$ . Средняя кинетическая энергия теплового движения частиц имеет порядок  $kT$ . Введем безразмерный *параметр неидеальности* плазмы  $\Gamma = U/kT$ . Близость его к единице означает переход к существенно неидеальной плазме. Условие идеальности плазмы ( $U \ll kT$ ) принимает тогда вид

$$\Gamma = \frac{e_1e_2n_e^{1/3}}{4\pi\epsilon_0kT} \ll 1 . \quad (2.2)$$

Положим для оценок  $e_1 = e_2 = e$ , где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона. В результате имеем

$$\frac{n_e^{1/3}}{T} \ll 6,0 \cdot 10^4 ,$$

где  $n_e$  подставляется в  $\text{м}^{-3}$ ,  $T$  – в К. Используя в качестве примеров приведенные выше параметры  $n_e$  и  $T$  для плазмы тлеющего разряда, термоядерной плазмы и ионосферной плазмы, нетрудно убедиться, что условие идеальности плазмы оказывается в этих случаях заведомо выполненным.

Для характеристики отклонения плазмы от идеальности вводят также *дебаевский параметр неидеальности*  $\Gamma_D$ . Еще в 1926 г. Дебаем и Хюккелем при создании теории электролитов было показано, что благодаря перераспределению (поляризации) заряженных частиц поле вокруг выделенной заряженной частицы изменяется. Обычное кулоновское поле этой частицы быстро спадает (экранируется) на расстояниях порядка так называемого радиуса Дебая.

Мы вернемся к этому вопросу несколько позже, после того как получим конкретное выражение для радиуса Дебая в плазме.

Термодинамика равновесной идеальной плазмы практически не отличается от термодинамики идеального газа. Идеальную многокомпонентную плазму можно рассматривать в общем случае как смесь идеальных газов, образованную из электронного, ионных и нейтральных компонентов различного сорта. Полное давление в такой плазме определяется законом Дальтона (1.8) и уравнением состояния идеального газа, так что

$$p = \sum_{\alpha} p_{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} kT . \quad (2.3)$$

Использование в (2.3) одной температуры  $T$  для всех компонентов соответствует плазме, находящейся в состоянии полного термодинамического равновесия. Такая плазма называется *изотермической*. Функция распределения  $f_{\alpha}$  по скоростям для каждого компонента плазмы, соответствующая равновесию, как и в случае идеального газа, имеет форму максвелловской функции распределения вида (1.71). Средние кинетические энергии хаотического движения частиц у всех компонентов плазмы (1.72) оказываются одинаковыми, определяемыми (так же, как и сама функция распределения) значением одной и той же температуры  $T$ .

Вместе с тем, в плазме нередко оказываются возможными состояния частичного (неполного) термодинамического равновесия с различными значениями температуры для каждого из компонентов. Как будет показано в главе 4, средняя передача энергии при столкновении легких и тяжелых частиц в плазме (например, при столкновениях электронов с ионами или нейтральными частицами) пропорциональна малому отношению  $m_e/m_{\beta}$  ( $\beta \neq e$ ), т.е. оказывается заметно меньшей, чем соответствующая передача энергии при взаимодействии частиц с близкими массами. Медленный обмен энергией между подсистемами электронов и тяжелых частиц приводит к тому, что равновесия в каждой из подсистем устанавливаются заметно быстрее, чем достигается полное равновесие в системе. Это означает, что в течение достаточно длительного промежутка времени, сравнимого иногда с макроскопическим временем задачи, в плазме сохраняется неполное равновесие, характеризуемое различными температурами электронного и ионного (или ней-



трального) компонента. Такая плазма получила название *неизотермической*.

Вид квазиравновесных функций распределения для каждого из компонентов плазмы устанавливается в этом случае тем же способом, который использовался ранее при получении выражения для  $f$  (1.25) или  $f_\alpha$  (1.71). Логарифм функции распределения  $f_\alpha$  записывается в виде линейной комбинации аддитивных инвариантов столкновений

$$\ln f_\alpha = \alpha_\alpha^{(0)} m_\alpha + \mathbf{a}_\alpha^{(1)} \cdot m_\alpha \mathbf{c}_\alpha + \alpha_\alpha^{(2)} \left( \frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2 \right).$$

При этом постоянная  $\alpha_\alpha^{(2)}$  определяется условием

$$n_\alpha \langle E_\alpha \rangle = \int \frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2} f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha = \frac{3}{2} n_\alpha k T_\alpha, \quad (2.4)$$

где средняя энергия единицы объема компонента плазмы связана с собственной температурой каждого компонента  $T_\alpha$ . В результате функция распределения по скоростям для компонента  $\alpha$  принимает вид

$$f_\alpha = n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_\alpha}{2k T_\alpha} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u})^2 \right]. \quad (2.5)$$

На практике мы часто имеем дело с плазмой, в которой функция распределения электронов записывается при электронной температуре  $T_e$ , в то время как функция распределения тяжелых частиц (ионов и нейтральных частиц) определена приближенно при одной и той же температуре  $T_i \approx T_n$ . Соответствующая плазма называется *двухтемпературной*. В общем случае уравнение состояния для *многотемпературной* плазмы записывается в виде

$$p = \sum_\alpha n_\alpha k T_\alpha. \quad (2.6)$$

Для полностью ионизованной двухтемпературной плазмы, например, имеем

$$p = k(n_e T_e + n_i T_i). \quad (2.6')$$

## 2.4. Квазинейтральность плазмы

Одна из важных особенностей плазмы заключается в том, что отрицательный заряд электронов в ней почти точно нейтрализует положительный заряд ионов. При любых воздействиях на нее плазма стремится сохранить свою *квазинейтральность*. Если в каком-то элементарном объеме плазмы происходит случайное смещение (например, за счет флуктуации плотности) части электронов, создающее избыток электронов в одном месте и недостаток в другом, в плазме возникает сильное электрическое поле, которое быстро восстанавливает квазинейтральность.

Следует отметить, что взаимная компенсация пространственного заряда положительных ионов и электронов в плазме имеет место лишь в среднем – в достаточно больших объемах и за достаточно большие интервалы времени. Существуют, очевидно, характерные, зависящие от параметров плазмы, длины и промежутки времени, на которых разделение зарядов может стать уже заметным. Характерный пространственный масштаб разделения зарядов называют *длиной Дебая*  $\ell_D$ . Временной масштаб определяется величиной  $\tau_D \approx (1/\omega_p)$ , где  $\omega_p$  называется *плазменной*, или *ленгмюровской частотой*. Для того чтобы ионизованный газ удовлетворял условию квазинейтральности, необходимо соблюдение неравенств

$$L \gg \ell_D, \quad \tau_L \gg \tau_D. \quad (2.7)$$

Именно выполнение этих условий, которые существенно определяются уровнем концентрации заряженных частиц, позволяют называть данный ионизованный газ плазмой. Как мы увидим из выполненных ниже оценок, параметры  $\ell_D$  и  $\tau_D$  оказываются обратно пропорциональными квадратному корню из плотности заряженных частиц  $n_e$ . Это означает, что при низкой плотности заряженных частиц их может оказаться недостаточно, чтобы создаваемый ими пространственный заряд как-то ограничивал движение частиц и приводил к поддержанию квазинейтральности в макроскопических объемах газа и на макроскопических промежутках времени. Только с ростом концентрации заряженных частиц создаваемое ими сильное самосогласованное электрическое поле позволяет быстро восстанавливать возникающую в среде квазинейтральность,

благодаря чему газ и приобретает свойства, позволяющие считать его плазмой.

### 2.5. Длина Дебая и плазменная частота

Оценим величину пространственного масштаба разделения зарядов на примере простой модели смещения плоского слоя электронов. Пусть плазма первоначально электрически нейтральна. В начальный момент времени плотности электронов и ионов для однократно ионизованной плазмы равны  $n_e = n_i$ . Предположим, что мы сместили все электроны вправо на расстояние  $d$  (рис. 2.1).

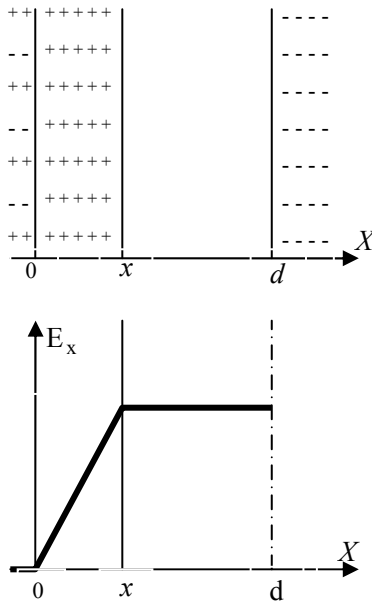


Рис. 2.1-

Очевидно, что совершаемая при этом работа затрачивается на создание слоя положительного объемного заряда  $\rho^e = n_e e$  между плоскостями  $x = 0$  и  $x = d$ . Пусть  $x$  равно некоторому промежуточному смещению электронов (рис.2.1а). Напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ , возникающего при таком смещении, определяется

из известного уравнения электростатики (уравнения Гаусса) для одномерного случая

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} . \quad (2.8)$$

В интервале смещений от 0 до  $x$  поле равно

$$E_x = \frac{n_e e}{\epsilon_0} x . \quad (2.9)$$

Распределение поля представлено на рис 2.1б.

В области плазмы справа от точки  $x$  электрическое поле, действующее на каждую заряженную частицу, равно его значению в точке  $x$  (2.9), с увеличением  $x$  это значение поля линейно возрастает. Работа, необходимая для дополнительного перемещения каждого электрона на расстояние  $dx$ , равна

$$dA = eE_x dx .$$

Полная работа, которую необходимо совершить, чтобы развести заряды на расстояние  $d$ , определяется тогда как,

$$A = \int_0^d eE_x dx = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0} \frac{d^2}{2} . \quad (2.10)$$

Эта работа равна, очевидно, потенциальной энергии  $W$  возникшего при разделении зарядов электрического поля.

Случайное разделение зарядов в плазме возникает за счет теплового движения частиц. Появляющееся в результате этого электрическое поле прекратит их разделение в том случае, если средняя кинетическая энергия частиц сравняется с потенциальной энергией возникшего электрического поля. Максимальный масштаб разделения зарядов определится тогда из условия  $W \leq (kT/2)$ , где  $(kT/2)$  – средняя тепловая энергия заряженных частиц, соответствующая их одномерному движению в направлении  $x$ . Полагая  $W = A = kT/2$ , для длины Дебая  $\ell_D = d$  в этом случае получаем оценку.

$$\ell_D = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{n_e e^2} \right)^{1/2} . \quad (2.11)$$

В единицах СИ длина Дебая равна

$$\ell_D = 69,0 \left( \frac{T}{n_e} \right)^{1/2}, \quad (2.11')$$

где  $T$  подставляется в К,  $n_e$  – в  $\text{м}^{-3}$ .

Для условий тлеющего разряда ( $n_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $T \sim 10^3 \text{ К}$ ) получаем  $\ell_D \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ , для термоядерной плазмы ( $n_e = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ ,  $T = 10^8 \text{ К}$ ) имеем  $\ell_D \sim 7 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ , для ионосферной плазмы ( $n_e = 10^{11} \text{ м}^{-3}$ ,  $T = 10^3 \text{ К}$ ) получаем  $\ell_D \sim 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

Используя ту же модель смещения плоского слоя электронов, можно оценить и характерный временной масштаб разделения зарядов  $\tau_D$ . Результатом смещения слоя является возникновение “возвращающей” силы, которая стремится восстановить квазинейтральность плазмы. В результате действия таких сил возникают периодические колебания электронного компонента плазмы (ионы, обладающие существенно большей массой, в таких колебаниях практически не участвуют). Движение электронов описывается при этом уравнением, следующим из записи второго закона Ньютона,

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_x = -\frac{1}{\varepsilon_0} n_e e^2 x, \quad (2.12)$$

которое можно представить в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_p^2 x = 0. \quad (2.12')$$

В результате получается типичное уравнение осциллятора, описывающее гармонические колебания с частотой

$$\omega_p = \left( \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Параметр  $\omega_p$  носит название *плазменной* или *лэнгмюровской частоты колебаний*.

Для конкретных расчетов  $\omega_p$  можно использовать формулу

$$\omega_p = 56,4 n_e^{1/2}, \quad (2.13')$$

где  $n_e$  подставляется в  $\text{м}^{-3}$ . Для рассмотренных выше примеров плазменная частота меняется от  $\sim 6 \cdot (10^7 - 10^9) \text{ с}^{-1}$  для плазмы тлеющего разряда и термоядерной плазмы до  $\sim 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  для ионосферной плазмы.

Заметим, что полная энергия колебаний осциллятора определяется как  $m_e (a_0 \omega_p)^2 / 2$ , где  $a_0$  – амплитуда колебаний. Полагая эту величину равной средней энергии теплового движения ( $kT/2$ ), и используя (2.13), получаем, как и следовало ожидать,  $a_0 = \ell_D$ , т.е. пространственный масштаб плазменных колебаний определяется длиной Дебая. Характерный временной масштаб разделения зарядов определяется, очевидно, как

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_p} = \left( \frac{\varepsilon_0 m_e}{n_e e^2} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

По порядку величины он равен времени, за которое электрон с тепловой скоростью  $\langle v \rangle \approx (kT/m_e)^{1/2}$  проходит расстояние  $\ell_D = \langle v \rangle \tau_D$ , откуда следует, что  $\omega_p$  и  $\ell_D$  связаны соотношением  $\omega_p = \langle v \rangle / \ell_D$ .

## 2.6. Экранирование поля заряженной частицы в плазме

Если в плазму ввести или поместить вблизи ее границ заряженное тело, то около него происходит перераспределение зарядов (поляризация плазмы). В результате такого перераспределения зарядов в плазме возникают электрические поля, компенсирующие поле, создаваемое заряженным телом. Эту ситуацию можно проанализировать на примере неподвижного сферического (или точечного) пробного заряда  $q > 0$ , помещенного в плазму. Потенциал поля  $\phi$ , создаваемого таким зарядом, описывается уравнением Пуассона

$$\Delta \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho^e. \quad (2.15)$$

Пусть плазма образована из электронов, одного сорта ионов с кратностью ионизации  $Z$  и нейтральных частиц, которые не вносят вклада в объемную плотность заряда  $\rho^e$ . Выражение для  $\rho^e$  имеет в этом случае вид

$$\rho^e = n_i e_i + n_e e_e = e(Zn_i - n_e) . \quad (2.16)$$

Поскольку плазма вблизи заряда  $q$  находится в состоянии термодинамического равновесия, плотности заряженных частиц, находящихся в электрическом поле с потенциалом  $\Phi$ , удовлетворяют распределению Больцмана (1.35)

$$n_i = n_{i0} \exp\left(-\frac{Ze\Phi}{kT_i}\right) , \quad n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\Phi}{kT_e}\right) . \quad (2.17)$$

Здесь  $n_{i0}$  и  $n_{e0}$  – плотности заряженных частиц в невозмущенной области плазмы, где  $\rho^e = 0$  или  $Zn_{i0} = n_{e0}$ .

На относительно больших расстояниях от заряда  $q$ , где  $e\Phi/kT_e \ll 1$  и  $e\Phi/kT_i \ll 1$ , можно использовать разложение экспонент в ряды. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, приближенно представим выражение для  $\rho^e$  как

$$\rho^e = \frac{1}{\varepsilon_0} e^2 \left( Z^2 \frac{n_{i0}}{kT_i} + \frac{n_{e0}}{kT_e} \right) \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} e^2 n_{e0} \left( \frac{Z}{kT_i} + \frac{1}{kT_e} \right) \Phi . \quad (2.18)$$

Уравнение Пуассона (2.15) записывается тогда в виде

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r_D^2} \Phi , \quad (2.19)$$

где  $r_D$  – характерный размер, называемый радиусом Дебая,

$$r_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT_e T_i}{n_{e0} e^2 (ZT_e + T_i)}} . \quad (2.20)$$

Поскольку точечный заряд создает вокруг себя сферически симметричное поле, уравнение (2.19) можно переписать как

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{1}{r_D^2} \Phi , \quad (2.21)$$

где  $r$  – радиальная координата.

Для решения уравнения (2.21) используем подстановку

$$\varphi = \frac{1}{r} g(r) .$$

Уравнение для функции  $g(r)$  принимает тогда вид

$$\frac{d^2 g}{dr^2} = \frac{1}{r_D^2} g , \quad (2.22)$$

решение которого можно представить как

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right) . \quad (2.23)$$

Постоянный множитель перед экспонентой определяется из условия, чтобы на малых расстояниях решение переходило в обычный кулоновский потенциал заряда  $q$  .

Полученный результат означает, что поле заряда в плазме экранируется заряженными частицами на расстоянии порядка радиуса Дебая (2.20). Заметим, что для однотемпературной плазмы ( $T_e = T_i$ ), образованной из электронов и однократно ионизованных ионов ( $Z = 1$ ), радиус Дебая определяется как

$$r_D = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{2n_e e^2} \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

и связан с введенной ранее дебаевской длиной  $\ell_D$  соотношением

$$r_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \ell_D . \quad (2.25)$$

## 2.7. Еще раз о критерии неидеальности плазмы

Из-за эффекта экранирования поля заряженной частицы в плазме в качестве меры расстояния, на котором потенциальная энергия взаимодействия заряженных частиц еще остается заметной, кажется целесообразным выбрать вместо среднего расстояния между частицами  $\bar{r} \approx n_e^{-1/3}$  дебаевский радиус  $r_D$  . В этом случае



$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_D} \quad (2.26)$$

и условие идеальности плазмы ( $U \ll kT$ ) принимает вид

$$\Gamma_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^3}{kT} \left( \frac{2n_e}{\epsilon_0 kT} \right)^{1/2} \approx 0,1 \frac{e^3 n_e^{1/2}}{(\epsilon_0 kT)^{3/2}} \ll 1. \quad (2.27)$$

Величина  $\Gamma_D$  называется *дебаевским параметром неидеальности* плазмы. Заметим, что этот параметр связан с параметром  $\Gamma$ , введенным в параграфе 2.1, соотношением

$$\Gamma_D \approx 5 \Gamma^{3/2}.$$

Простая оценка показывает, что уже при  $\Gamma \leq 0,05$  мы имеем  $\Gamma_D \leq 0,065$ , поэтому использование и того и другого параметра (при достаточной их малости) в качестве меры идеальности плазмы оказывается практически равноценным.

Дебаевский параметр неидеальности имеет непосредственное отношение к вириальным поправкам к уравнению состояния идеальной плазмы. Прямой теоретический расчет дает [5]

$$p = (n_e + n_i) kT (1 - 0,18 \Gamma_D). \quad (2.28)$$

Отметим, что в отличие от идеального газа, где вириальные поправки соответствуют степенному разложению по параметру плотности газа  $n$ , первая поправка к уравнению состояния идеальной плазмы оказывается пропорциональной  $n_e^{1/2}$ .

Можно дать еще одну часто встречающуюся интерпретацию критерия идеальности плазмы. Рассмотрим объем плазмы с радиусом, равным радиусу Дебая, поскольку именно на границах этого объема экранируется электрическое поле любой выделенной в плазме заряженной частицы. Среднее число заряженных частиц одного знака в этой сфере равно

$$N_D = \frac{4}{3} \pi r_D^3 n_e = \frac{4}{3} \pi n_e \left( \frac{\epsilon_0 kT}{2n_e e^2} \right)^{3/2} \approx 1,6 \frac{(\epsilon_0 kT)^{3/2}}{n_e^{1/2} e^3}. \quad (2.29)$$

Легко заметить, что

$$N_D \approx 0,15 \frac{1}{\Gamma_D}.$$

Уже при  $\Gamma_D \leq 0,01$ , мы имеем  $N_D \geq 15$ , поэтому в качестве критерия идеальности плазмы можно принять условие, чтобы число заряженных частиц в сфере Дебая было достаточно большим ( $N_D \gg 1$ ).

## 2.8. Плазменные колебания и плазменные волны

Колебания электронной плотности, связанные с нарушением квазинейтральности плазмы, можно проанализировать на основе более общего подхода, чем просто колебания плоского слоя электронов, рассмотренные в параграфе 2.2. В основу такого анализа могут быть положены уравнения Эйлера (уравнения непрерывности и движения), записанные для электронного компонента плазмы,

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot n_e \mathbf{u}_e = 0, \quad (2.30)$$

$$n_e m_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\nabla p_e - n_e e \mathbf{E} \quad (2.31)$$

вместе с уравнением адиабаты и уравнением состояния для электронов

$$p_e n_e^{-\gamma} = const, \quad p_e = n_e kT. \quad (2.32)$$

Система уравнений должна быть дополнена уравнением Гаусса для определения напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_e = \frac{1}{\varepsilon_0} e(Zn_i - n_e). \quad (2.33)$$

Рассмотрим сначала приближение так называемой *холодной плазмы*, когда можно не учитывать влияние теплового движения частиц. Последнее соответствует пренебрежению градиентом электронного давления в уравнении движения (2.31). Условия, налагаемые на параметры плазмы в этом приближении, мы сформулируем чуть позже. Поскольку давление  $p_e$  не входит в уравнения (2.30) – (2.31), использование соотношений (2.32) в этом случае не понадобится.

Предположим, что в плазме по тем или иным причинам возникла малая флуктуация плотности электронного компонента и связанное с этим малое отклонение плотности электронного заряда, так что

$n_e = n_e^0 + n_e'$ . Будем считать, что из-за большой массы ионов по сравнению с электронами, ионы за время отклика системы на возмущение электронной плотности не успевают сдвинуться с места, что позволяет рассматривать движение электронов на фоне однородного распределения ионов с плотностью  $n_i = n_i^0$ . При этом  $n_e^0 = Zn_i^0$  и  $\rho_e = -en_e'$ , а уравнение (2.33) принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} en_e' . \quad (2.34)$$

Уравнение (2.30) после линеаризации можно представить в виде

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} + n_e^0 \nabla \cdot \mathbf{u}_e = 0 . \quad (2.35)$$

Дифференцируя уравнение (2.35) по времени, используя (2.34) и уравнение движения (2.31), в котором опущен член с  $\nabla p_e$ , получаем

$$\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} - \frac{n_e^0 e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.36)$$

или

$$\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} + \omega_p^2 n_e' = 0 . \quad (2.36')$$

Мы опять приходим к уравнению для осциллятора, описывающему гармонические колебания плотности электронов с плазменной частотой  $\omega_p$ , заданной выражением (2.13).

Нетрудно показать, что если учесть тепловое движение электронов в исходных уравнениях, то их линеаризация (в приближении малых амплитуд возникающих возмущений макроскопических параметров плазмы) приводит к результату, которое описывает распространение продольных волн электростатического заряда в плазме (*плазменных или лэнгмюровских волн*).

Используя тот же прием, что и при анализе распространения звука в газе (см. параграф 1.9), представим возмущенные параметры электронного компонента плазмы и электрическое поле  $E$  в виде

$$\begin{aligned}
n_e &= n_e^0 + n'_e \exp[i(kx - \omega t)] , \\
p_e &= p_e^0 + p'_e \exp[i(kx - \omega t)] , \\
u_e &= u'_e \exp[i(kx - \omega t)] , \\
E &= E' \exp[i(kx - \omega t)] .
\end{aligned} \tag{2.37}$$

При этом используется то очевидное обстоятельство, что для невозмущенной плазмы средняя скорость электронов и напряженность электрического поля равны нулю.

Подстановка выражений (2.37) в систему уравнений (2.30) – (2.33), записанных для одномерного случая и линеаризованных по малым параметрам  $n'_e$ ,  $p'_e$ ,  $u'_e$ ,  $E'$ , приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
i\omega n'_e &= ikn_e^0 u'_e , \\
i\omega m_e n_e^0 u'_e &= ikp'_e + n_e^0 eE' , \\
\frac{p'_e}{p_e^0} &= \gamma \frac{n'_e}{n_e^0} , \quad ikE' = -\frac{1}{\epsilon_0} en'_e .
\end{aligned} \tag{2.38}$$

При записи этих уравнений слева и справа опущены, как обычно, возникающие при дифференцировании множители  $\exp[i(kx - \omega t)]$ . Постоянная адиабаты определяется при этом выражением  $\gamma = (2 + m)/m$ , где  $m$  – число поступательных степеней свободы частицы. Для одномерного сжатия имеем  $m = 1$  и  $\gamma = 3$ . При этом  $p_e^0 = n_e^0 kT_e^0 = m_e n_e^0 \langle v_{ex}^2 \rangle$ , где  $\langle v_{ex}^2 \rangle$  – среднее значение квадрата компоненты скорости молекул вдоль оси  $x$ .

Последовательно исключая из уравнений (2.38) входящие в них амплитуды колебаний макроскопических величин, получаем дисперсионное соотношение для плазменных волн (т.е. соотношение, связывающее частоту колебаний  $\omega$  и волновое число  $k$ )

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \gamma \langle v_{ex}^2 \rangle k^2 , \tag{2.39}$$

где  $\langle v_e^2 \rangle = 3kT_e/m_e$ .

Соотношение (2.39) означает, что в приближении *горячей плазмы*, плазменные волны обладают дисперсией (частота волны  $\omega$  зависит

нелинейным образом от волнового числа  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны). Для фазовой и групповой скоростей распространения волн получаем выражения

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \bar{v}_e \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \bar{v}_e \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}, \quad (2.40)$$

где  $\bar{v}_e = \sqrt{\langle v_e^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m_e}$  — среднеквадратичная скорость электронов. Заметим, что обе скорости связаны простым соотношением

$$v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = v_e^2. \quad (2.41)$$

В случае *холодной* плазмы ранее был получен результат  $\omega = \omega_p$ , и групповая скорость  $v_{\text{гр}}$  оказалась равной нулю, т.е. в холодной плазме лэнгмюровские волны не распространяются. Из соотношения (2.39) следует, что приближение холодной плазмы оправдано, когда выполнено условие  $\bar{v}_e \ll (\omega/k)$ . Это означает, что тепловые скорости частиц настолько малы, что частицы не успевают сместиться на расстояние порядка длины волны за один период. Учет теплового движения электронов включает механизм, который обеспечивает распространение возмущения за пределы начальной области, масштаб которой определяется длиной Дебая. Как следует из проведенного анализа, соседние участки будут вовлечены в волновой процесс только при наличии градиента давления (или плотности) электронов.

Закон дисперсии (2.39) можно записать также в виде

$$\omega = \omega_p (1 + \gamma_e k^2 \ell_D^2)^{1/2}. \quad (2.42)$$

Рассмотрение, основанное на более строгой теории, показывает, что в случае, когда второе слагаемое под знаком квадратного корня имеет порядок единицы (или, что же самое, когда длина волны оказывается порядка длины Дебая), лэнгмюровская волна сильно затухает из-за взаимодействия заряженных частиц с волнами (*затухание Ландау*). Поэтому плазменные волны могут существовать без значительного поглощения лишь в том случае, когда их длина вол-

ны значительно меньше дебаевской длины. Используя разложение выражения (2.42) в ряд по малому параметру, получаем

$$\omega = \omega_p \left( 1 + \frac{3}{2} k^2 \ell_D^2 \right), \quad k^2 \ell_D^2 \ll 1. \quad (2.43)$$

Групповая скорость распространения волн приближенно определяется в этом случае формулой

$$v_{гр} = \sqrt{3} k \bar{v}_e \ell_D. \quad (2.44)$$

Очевидно, что в рассматриваемом нами случае выполнено условие  $v_{гр} \ll \bar{v}_e$ , т.е. скорость распространения волны оказывается заметно меньшей, чем среднеквадратичная или средне-тепловая скорость электронов.

## 2.9. Ионизационное равновесие в плазме. Формула Саха

Основными источниками образования заряженных частиц в плазме оказываются ионизация атомов при их столкновениях с электронами (*ударная ионизация*) или при взаимодействии с электромагнитным излучением (*фотоионизация*). Каждому процессу ионизации соответствует обратный процесс – *рекомбинация*, т.е. образование нейтрального атома в результате захвата электрона ионом. Процесс рекомбинации может происходить лишь в присутствии третьей частицы, участвующей в столкновении, поскольку иначе нарушаются законы сохранения импульса и энергии при столкновениях частиц. Энергия связи пары частиц (электрона и иона) в основном состоянии имеет строго определенное значение, поэтому избыток энергии, возникающий при образовании атома, должен отбираться третьей частицей. Такой третьей частицей может быть электрон, ион, нейтральный атом или образующийся в результате рекомбинации фотон.

Уравнение баланса электронов в единичном объеме (уравнение непрерывности) имеет форму уравнения (2.30), в правой части которого должны присутствовать члены, отвечающие появлению и исчезновению заряженных частиц (электронов) за счет процессов ионизации ( $N^+$ ) и рекомбинации ( $N^-$ ), т. е.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot n_e \mathbf{u}_e = N^+ - N^- . \quad (2.45)$$

При относительно высоких концентрациях заряженных частиц в плазме определяющую роль играет трехчастичная рекомбинация, в которой участвуют ион и два электрона. Ниже мы ограничимся рассмотрением ионизационного равновесия, определяемого наличием только такого типа рекомбинации. Схема прямого и обратного процессов выглядит при этом как



Скорости ионизации и рекомбинации для этого случая определяются выражениями

$$N^+ = k_f n_e n_a , \quad N^- = k_r n_e^2 n_i , \quad (2.47)$$

где  $k_f$  и  $k_r$  — соответственно константы прямой и обратной реакций.

*Ионизационному равновесию* в плазме отвечает ситуация, когда концентрации заряженных частиц перестают меняться во времени и отсутствует диффузионный перенос частиц. Это соответствует обращению в нуль левой части уравнения (2.45), откуда следует, что в равновесии скорости прямого и обратного процесса равны друг другу. Приравнивая  $N^+$  и  $N^-$ , имеем

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{k_f}{k_r} = K(T) . \quad (2.48)$$

Величина  $K(T)$ , равная отношению констант скоростей прямого и обратного процессов, является константой равновесия для процесса (2.46). Она уже не зависит от кинетики процесса и является функцией температуры  $T$ . Константу равновесия реакции  $K$  можно определить, опираясь на известные результаты статистической физики [2], в частности на тот факт, что в состоянии химического равновесия оказываются равными так называемые химические потенциалы веществ, вступающих в реакцию (в данном случае атомов) и продуктов реакции (ионов и электронов). Здесь мы воспользуемся другим, более наглядным, подходом, основанном на использовании Больцмановского распределения частиц по состояниям [6,7].

Заметим предварительно, что полученное в предыдущей главе выражение для функции распределения частиц по скоростям и их внутренним состояниям (1.41) справедливо не только для случая молекул с вращательными и колебательными степенями свободы, но и для любых других частиц, обладающих дискретным спектром внутренних состояний. К их числу можно отнести также атомы и ионы, находящиеся в различных состояниях электронного возбуждения. Для функций распределения частиц по электронным состояниям можно в этом случае записать выражение

$$f(v, E_j) = f_M(v) \frac{g_j}{Q} \exp\left(-\frac{E_j}{kT}\right), \quad (2.49)$$

$$Q = \sum_j g_j \exp(E_j/kT).$$

Здесь  $f_M(v)$  – максвелловская функция распределения частиц по скоростям,  $E_j$  – энергия  $j$ -го уровня,  $Q$  – статистическая сумма,  $g_j$  – статистический вес  $j$ -го состояния. Функции  $f(v, E_j)$  нормированы таким образом, что

$$\sum_j \int f(v, E_j) d\mathbf{v} = n,$$

где  $n$  – полная плотность частиц. Используя (2.49), после интегрирования по скоростям получаем соотношение между  $n_j$  – плотностью частиц, находящихся в  $j$ -ом состоянии, и  $n_0$  – плотностью частиц в основном состоянии

$$n_j = n_0 \frac{g_j}{g_0} \exp\left(-\frac{E_j}{kT}\right). \quad (2.50)$$

Здесь  $E_j$  – энергия возбуждения  $j$ -го состояния (отсчет энергии производится от основного состояния),  $g_j, g_0$  – статистические веса  $j$ -го и основного состояния соответственно.

Для получения необходимых соотношений, связывающих плотности заряженных и нейтральных частиц в плазме в условиях ионизационного равновесия, нам нужно определить число состояний, соответствующих свободному движению частицы (электрона). Из статистической физики известно, что в так называемом квазиклас-



сическом приближении каждому возможному состоянию соответствует элементарный объем в фазовом пространстве, равный  $2\pi\hbar$  [3]. Таким образом, для частицы, координата которой лежит в интервале между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , а значение импульса в интервале между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ , число состояний равно числу элементарных ячеек  $dn = d\mathbf{p}d\mathbf{r}/(2\pi\hbar)^3$ . Число свободных электронов с энергией  $\varepsilon$  (приходящихся на один атом), имеющих в объеме  $V$  значения импульса, лежащие в интервале  $d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$ , определяется при этом выражением

$$dN_e = Vg_e \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right). \quad (2.51)$$

Здесь

$$\varepsilon = \varepsilon_I + \frac{p^2}{2m} -$$

энергия, необходимая для отрыва электрона от атома ( $\varepsilon_I$  – энергия ионизации) и передачи ему кинетической энергии  $p^2/2m_e$ ,  $g_e$  – статистический вес электронов.

Число свободных электронов на один атом в определенном квантовом состоянии находится интегрированием выражения (2.51) по всем значениям импульса

$$N_e^* = Vg_e \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_I}{kT}\right).$$

Полное число электронов определяется умножением этого результата на число атомов в одном квантовом состоянии ( $N_a/g_a$ ), где  $g_a$  – статистический вес нейтрального атома. В итоге имеем

$$N_e = N_a \frac{g_e}{g_a} V \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_I}{kT}\right).$$

Теперь следует учесть, что в процессах равновесной ионизации-рекомбинации принимают участие также ионы. Тогда за объем  $V$  следует принимать объем, приходящийся на один ион в опреде-

ленном квантовом состоянии или  $V = 1/(n_i / g_i) = g_i / n_i$ . Учитывая, что  $N_e/N_a = n_e/n_a$ , находим окончательно

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = K = \frac{g_e g_i}{g_a} \left( \frac{m_e k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_I}{kT}\right). \quad (2.52)$$

Правая часть этой формулы и есть интересующее нас выражение для константы равновесия (2.48). Полученный результат носит название *формулы Саха*. Для конкретных вычислений на основе формулы (2.52) полезно заметить, что в единицах СИ

$$\left( \frac{m_e k}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} = 2,42 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} \text{ К}^{-3/2}$$

При этом статистический вес электронов  $g_e = 2$ , статистические веса ионов и атомов рассчитываются независимо. Так, например, для атома водорода в состоянии с главным квантовым числом, равным  $n$ , статистический вес  $g_a$  соответствует кратности вырождения уровней и равен  $2n^2$ , при этом  $g_i = 1$ . Для атомов других веществ и соответствующих им ионов вычисление полных статистических весов требует знания энергий, спинов и орбитальных моментов возбужденных электронных состояний, которые берутся из спектроскопических данных.

Введем определение степени ионизации плазмы

$$\alpha = \frac{n_i}{n_o} = \frac{n_i}{n_i + n_a}. \quad (2.53)$$

Тогда с учетом квазинейтральности плазмы ( $n_e = n_i$ ) из (2.48) следует

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{K}{n_o}. \quad (2.54)$$

Удобно выразить степень ионизации как функцию температуры  $T$  и полного давления плазмы  $p$ . Учитывая, что

$$p = (n_e + n_i + n_a) k T = n_o (1 + \alpha) k T,$$

окончательно получаем

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{2g_i}{g_a} \left( \frac{m_e}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{(kT)^{5/2}}{p} \exp\left(-\frac{\varepsilon_I}{kT}\right) \quad (2.55)$$

Было показано (см., например, [8]), что формула (2.55) может с хорошим приближением применяться и в случае неизотермической плазмы с  $T_e \neq T$ . Поскольку ионизация происходит в результате столкновений атома с электроном, а функция распределения электронов близка к максвелловской при температуре  $T_e$ , единственное изменение в формуле (2.55) заключается в этом случае в замене температуры  $T$  на электронную температуру  $T_e$ .

### ГЛАВА 3. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В предыдущих главах мы интересовались равновесными либо локально равновесными состояниями газа и плазмы. Основная цель дальнейшего рассмотрения состоит в анализе явлений, возникающих при отклонении системы от состояния равновесия. Как правило, мы будем предполагать, что отклонения эти являются малыми.

Примером типичной неравновесной ситуации является пространственная неоднородность газа или газовой смеси, когда их гидродинамическая скорость, температура и плотности (концентрации) отдельных компонентов меняются от точки к точке. Переход к равновесному состоянию осуществляется при этом за счет возникающего в системе необратимого переноса массы, импульса и энергии от одних частей газа к другим. Им соответствуют известные явления *диффузии*, *вязкости* (внутреннего трения) и *теплопроводности*. В случае ионизованного газа (плазмы) к этому добавляется еще перенос заряда или *электропроводность*, связанная с относительной диффузией заряженных частиц. Все эти процессы объединяются под общим названием *явления переноса*.

Для слабо неравновесных состояний газа и плазмы оказываются приближенно справедливыми *линейные соотношения переноса*, связывающие необратимые потоки массы, импульса и энергии с так называемыми *термодинамическими силами* (градиентами основных макроскопических переменных, внешними силами и т.п.). К числу таких линейных феноменологических законов относятся, например, закон Ньютона для вязких напряжений, закон теплопроводности Фурье, закон диффузии Фика, закон электропроводности Ома. Эти законы можно считать чисто эмпирическими, хорошо подтверждаемыми большим экспериментальным материалом. С другой стороны, они находят обоснование и в рамках *линейной термодинамики необратимых процессов (неравновесной термодинамики)*. Более того, неравновесная термодинамика предсказывает ряд перекрестных явлений, описываемых линейными соотношениями, поскольку каждый поток в принципе может являться линейной функцией всех термодинамических сил, имеющих одинаковую тензорную размерность [9].

Макроскопические переменные, описывающие поведение газа и плазмы (плотность, гидродинамическая скорость, температура) удовлетворяют, как известно, *локальным уравнениям сохранения массы, импульса и энергии*. В пренебрежении диссипативными процессами эти уравнения (уравнения идеальной жидкости) уже рассматривались в параграфе 1.8. В общем случае в них должны входить дополнительные члены, учитывающие процессы диссипации или необратимый перенос массы, заряда, импульса, энергии в газе и плазме. Линейные соотношения переноса позволяют замкнуть уравнения сохранения, т.е. получить в конечном счете классические уравнения *газовой динамики*, а при учете электрического и магнитного полей также и уравнения *магнитной газодинамики* плазмы.

Следует отметить, что феноменологический подход дает возможность установить лишь общую структуру соотношений переноса, коэффициентами пропорциональности в которых являются так называемые *коэффициенты переноса*. Явные выражения для этих коэффициентов, связывающие их с основными термодинамическими переменными газа и плазмы, а главное – с параметрами столкновений составляющих их частиц, могут быть получены только методами кинетической теории. Анализу этих вопросов будут посвящены следующие главы.

В настоящей главе обсуждаются получаемые на основе феноменологического подхода общие уравнения сохранения для газов и газовых смесей и используемые в них линейные соотношения переноса. Соответствующие феноменологические уравнения переноса для плазмы будут рассмотрены в главе 7.

### ***3.1. Потoki величин***

Прежде чем перейти к конкретному анализу различных явлений переноса в газах, полезно ввести ряд важных формальных определений для используемых при этом макроскопических параметров переноса.

Перенос массы, импульса и энергии молекул через какую-либо поверхность в газе принято характеризовать плотностью потока соответствующей величины. Плотность потока соответствует количеству величины, проходящей в единицу времени через единич-

ную площадь поверхности. Рассмотрим, например, определение *плотности потока массы* частиц простого газа в предположении что все частицы имеют направленную (упорядоченную) скорость движения  $\mathbf{u}$ . Выделим в газе малый элемент поверхности  $ds$ . Ориентацию этого элемента будем характеризовать единичным вектором  $\mathbf{n}$ , направленным по нормали к поверхности. Очевидно, что все частицы, пересекающие элемент площади  $ds$  в течение времени  $dt$ , должны первоначально находиться в цилиндре с основанием  $ds$  и образующей, параллельной  $\mathbf{u}$  и равной  $|\mathbf{u}|dt$  (рис. 3.1). Объем этого цилиндра равен  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})dsdt$ . Пусть массовая плотность газа равна  $\rho = mn$ , где  $m$  – масса молекулы,  $n$  – число молекул в единице объема (плотность числа частиц). Тогда плотность потока массы частиц, которая является скалярной величиной, определяется как  $(\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u})$ , а величина  $\rho \mathbf{u}$  называется *вектором плотности потока массы*.

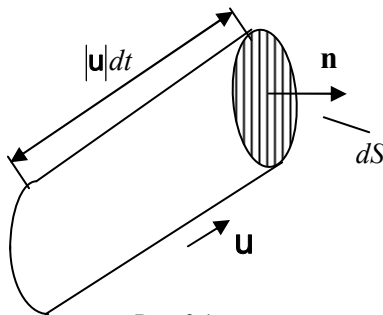


Рис. 3.1

Более точное определение плотности потока массы частиц должно учитывать распределение молекул по скоростям. Напомним, что число молекул в единице объема, имеющих значение вектора скорости молекул в интервале между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , равно  $f(\mathbf{v})d\mathbf{v}$ . Соответствующее число молекул, пересекающих поверхность  $ds$  за время  $dt$ , определяется выражением  $f(\mathbf{v})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})dvdsdt$ . Плотность общего потока получается интегрированием по всем значениям скоростей молекул. Тогда для вектора плотности потока массы получаем

$$\rho \mathbf{u} = \int m \mathbf{v} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (3.1)$$

Полученное выражение носит самый общий характер и справедливо как для равновесных, так и для неравновесных состояний газа. Если подставить сюда равновесную функцию распределения (1.26), определяемую через собственную скорость молекул  $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , то после интегрирования по скоростям частиц приходим к очевидному результату: скорость  $\mathbf{u}$  равна скорости системы отсчета, движущейся вместе с газом. Это связано с тем, что среднее значение вектора скорости хаотического (теплого) движения частиц в равновесном состоянии газа равно нулю. Такой же результат получается при использовании локально-равновесного распределения (1.82).

Используя приведенные выше соображения, можно дать общее определение плотности потока какой-либо величины, переносимой молекулами газа через элемент площади  $ds$  поверхности, которая перемещается с макроскопической скоростью газа  $\mathbf{u}$ . Если какая-то произвольная величина  $\psi$  зависит от собственной скорости молекул газа  $\mathbf{c}$ , то плотность потока этой величины записывается как  $(\mathbf{n} \cdot \Psi)$ , а вектор плотности потока  $\Psi$  определяется выражением:

$$\Psi = \int \psi(\mathbf{c}) \mathbf{c} f(\mathbf{c}) d\mathbf{c} . \quad (3.2)$$

Рассмотрим, например, определение вектора плотности потока импульса в газе через поверхность, движущуюся со скоростью  $\mathbf{u}$ .

Полагая  $\psi = mc_x$ , имеем:

$$\Psi = \int mc_x \mathbf{c} f(\mathbf{c}) d\mathbf{c} . \quad (3.3)$$

Эта величина соответствует вектору плотности потока, характеризующего перенос  $x$ -компоненты импульса. Аналогичные выражения можно записать для  $y$ - и  $z$ -компонент импульса. В результате имеем совокупность трех векторов потоков, связанных с переносом импульса. Девять компонент этих векторов образуют симметрический тензор второго ранга, который можно записать как:

$$\mathbf{P} = m \int \mathbf{c} \mathbf{c} f(\mathbf{c}) d\mathbf{c} . \quad (3.4)$$

Заметим, что  $\mathbf{c}\mathbf{c}$  соответствует тензорному произведению двух векторов, называемому *диадой*. В тензорных обозначениях

$$P_{rs} = m \int c_r c_s f(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \quad , \quad (3.5)$$

где индексы  $r$  и  $s$  нумеруют декартовы компоненты осей координат.

Тензор плотности потока импульса  $P_{rs}$  носит название *тензора давлений* (или *тензора напряжений*). В обычном матричном представлении он записывается как

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} .$$

Недиагональные компоненты тензора удовлетворяют при этом условиям симметрии ( $P_{rs} = P_{sr}$  при  $s \neq r$ ).

Отдельные компоненты тензора  $P_{rs}$  имеют следующий смысл: диагональные элементы  $P_{xx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{zz}$  равны *нормальным напряжениям*, а недиагональные представляют собой *сдвиговые или касательные напряжения*. Это означает, например, что  $P_{xx}$  равно силе, действующей в направлении  $x$  на единицу площади поверхности, нормальной к направлению  $x$ , а  $P_{yx}$  равно силе, действующей в направлении  $x$  на единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению  $y$ . На рис. 3.2 изображены декартовы компоненты тензора давлений  $P_{yx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{yz}$ , в сумме дающие результирующую силу  $\mathbf{P}_y$ , действующую на единицу поверхности, перпендикулярной направлению  $y$ .

Для газа одноатомных молекул (т.е. при отсутствии у молекул внутренних степеней свободы) величина

$$p = \frac{1}{3} (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) \quad (3.6)$$



имеет смысл *гидростатического* давления или просто *давления*. Она соответствует среднему из нормальных давлений, действующих на любые три ортогональные плоскости.

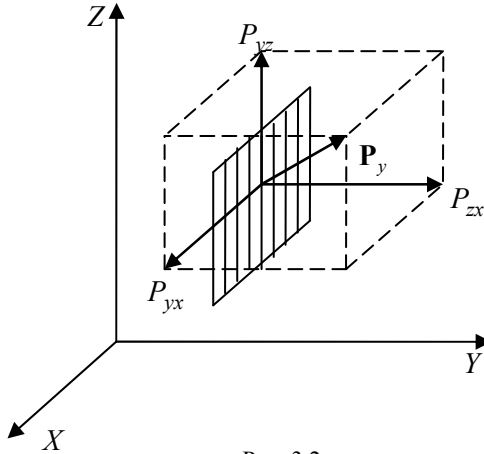


Рис. 3.2

Для равновесной максвелловской функции распределения (1.26), используя определение (3.4), после интегрирования по скоростям получаем, что недиагональные элементы тензора  $\mathbf{P}$  равны нулю, а диагональные элементы равны друг другу, т.е. в этом случае

$$\mathbf{P} = p\mathbf{I} \quad , \quad p = nkT \quad . \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор второго ранга. Этому тензору соответствует единичная матрица с элементами  $\delta_{rs}$  где  $\delta_{rs}$  – символ Кронекера ( $\delta_{rs} = 1$ , если  $r = s$ ,  $\delta_{rs} = 0$ , если  $r \neq s$ ).

В общем случае величину  $\mathbf{P}$  можно представить как

$$\mathbf{P} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi} \quad (3.8)$$

или в тензорных обозначениях

$$P_{rs} = p\delta_{rs} + \pi_{rs} \quad , \quad (3.8')$$

где  $\pi_{rs}$  – недиагональная часть тензора. Тензор  $\boldsymbol{\pi}$  носит название *тензора вязких напряжений* и определяет необратимый “вязкий” перенос импульса в газе. Его компоненты отличны от нуля, если функция распределения отличается от равновесной. Заметим, что

представление (3.8') используется обычно в кинетической теории. В газовой динамике, например, часто используется представление  $P_{rs} = p\delta_{rs} - \tau_{rs}$ , так что  $\tau = -\pi$ .

В случае идеального газа, образованного из молекул с возбужденными внутренними степенями свободы, общее определение тензора давлений имеет вид

$$\mathbf{P} = m \sum_i \int \mathbf{c} \mathbf{c} f(\mathbf{c}, E_i) d\mathbf{c} . \quad (3.9)$$

Диагональная часть тензора  $\mathbf{P}$  в этом случае содержит вклад от так называемой *объемной вязкости*  $p_V$ , так что

$$P_{rs} = (p + p_V) \delta_{rs} + \pi_{rs} . \quad (3.10)$$

Дадим теперь определение вектора плотности потока кинетической энергии или *теплового потока*  $\mathbf{Q}$ , которое следует из выражения (3.2), если положить в нем  $\varphi = mc^2/2$ ,

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} m \int c^2 \mathbf{c} f(\mathbf{c}) d\mathbf{c} . \quad (3.11)$$

Для газа, молекулы которого обладают внутренними степенями свободы, необходимо учитывать вклад в тепловой поток также и от переноса энергии внутренних состояний молекул. В этом случае

$$\mathbf{q} = \sum_i \int \left( \frac{1}{2} mc^2 + E_i \right) \mathbf{c} f(\mathbf{c}, E_i) d\mathbf{c} . \quad (3.12)$$

### 3.2. Уравнения сохранения для простого газа

Уравнениями сохранения называются *уравнения баланса массы, импульса и энергии* в газе и газовой смеси. При их записи мы ограничимся, как и раньше, рассмотрением достаточно разреженных газов, удовлетворяющих условию идеальности. В этом параграфе мы рассматриваем случай простого (однокомпонентного) газа.

Уравнение баланса массы, или *уравнение непрерывности*, записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{u} . \quad (3.13)$$

Оно отличается от использованного нами в главе 1 уравнения (1.83) умножением его на массу молекулы  $m$  (в соответствии с определением массовой плотности газа  $\rho = mn$ ). В общем случае  $\rho \mathbf{u}$  определено выражением (3.1).

Уравнение (3.13) соответствует локальной форме записи уравнений сохранения, принятой в гидродинамике. Более очевидный физический смысл имеет интегральная форма записи, которая получается, если проинтегрировать (3.13) слева и справа по конечному объему  $V$  и представить результат в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot \rho \mathbf{u} dV . \quad (3.14)$$

Преобразуя интеграл по объему в правой части (3.14) в интеграл по поверхности в соответствии с теоремой Гаусса-Остроградского, находим

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \mathbf{u} d\mathbf{S} , \quad (3.14')$$

где вектор  $d\mathbf{S}$  по абсолютной величине равен площади элемента поверхности  $dS$  и направлен по внешней нормали к поверхности ( $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ ). Интегральное соотношение баланса (3.14') отражает тот очевидный факт, что скорость изменения массы газа, находящегося в объеме  $V$ , равна убыли массы газа за счет его вытекания через замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую данный объем.

Интегральная форма записи уравнений может быть использована и при рассмотрении переноса импульса и энергии в газе. Для простоты мы будем применять в дальнейшем лишь локальную форму записи соответствующих уравнений.

*Уравнение баланса импульса* можно представить как

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{P} + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + n\mathbf{F} . \quad (3.15)$$

Фигурирующая в правой части уравнения величина  $\mathbf{P} + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}$  имеет смысл тензора плотности потока импульса с конвективной частью  $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ , которая связана с непосредственным переносом им-

пульса вместе с массой движущегося газа. (Напомним, что в тензорных обозначениях представление диады  $\mathbf{uu}$  соответствует записи  $u_r u_s$ ). Величина  $\mathbf{P}$  – это *тензор давлений*, понятие о котором мы ввели в предыдущем параграфе. Векторная величина  $\mathbf{F}$  есть внешняя сила, действующая на частицу газа. Так, если на частицы газа действует сила тяжести, то  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести.

Используя определение  $\mathbf{P}$  (3.6) и уравнение непрерывности (3.13), вместо уравнения (3.15) получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} - n\mathbf{F} = 0, \quad (3.16)$$

которое называется *уравнением движения* газа. Здесь  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  соответствует оператору полной (субстанциональной) производной по времени.

Уравнение (3.16), если записать его для одной из декартовых компонент вектора, можно представить также как

$$\rho \frac{du_r}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_r} p + \frac{\partial}{\partial x_s} \pi_{rs} - nF_r = 0 \quad (3.16')$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

*Уравнение баланса энергии* может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + \rho U \right) = -\nabla \cdot \left[ \left( \frac{\rho u^2}{2} + \rho h \right) \mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} : \mathbf{u} + \mathbf{q} \right] + n \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}. \quad (3.17)$$

Величина под знаком производной по времени представляет собой плотность энергии газа, где  $\rho u^2/2$  – кинетическая энергия единицы массы газа, а  $U$  – *средняя тепловая энергия единицы массы газа* или *удельная внутренняя энергия*. Последняя величина связана со средней энергией единицы объема газа, введенной в параграфе 1.9, соотношением  $\rho U = n\langle E \rangle$ . Как следует из выражения (1.47), величина  $n\langle E \rangle$  содержит в общем случае вклады, учитывающие энергию как поступательных, так и внутренних степеней свободы молекул.

В выражении в квадратных скобках (под знаком дивергенции) в правой части уравнения (3.17) содержатся: вектор плотности потока энергии, а также вектор теплового потока  $\mathbf{Q}$ , понятие о котором мы ввели ранее. Фигурирующий здесь же член  $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{u}$ , соответствующий диссипации энергии при наличии сил вязкого трения, в тензорных обозначениях записывается как  $\pi_{rs}u_s$ , где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Заметим, что в выражение для плотности потока энергии, помимо обычного члена  $(\rho u^2/2)\mathbf{u}$ , входит плотность потока энтальпии  $\rho h\mathbf{u}$ , где удельная энтальпия определена известным выражением [2]

$$h = U + \frac{P}{\rho} . \quad (3.18)$$

Тот факт, что в выражении для плотности потока энергии фигурирует удельная энтальпия  $h$ , а не просто удельная внутренняя энергия  $U$ , имеет простой физический смысл. Рассмотрим для этого интегральное представление уравнения энергии, опустив для простоты в (3.17) члены, связанные с учетом  $\boldsymbol{\pi}$ ,  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{F}$ . Интегрируя (3.17) слева и справа по объему и используя теорему Гаусса-Остроградского, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\rho u^2}{2} + \rho U \right) dV = - \oint_S \rho \mathbf{u} \left( \frac{u^2}{2} + U \right) d\mathbf{S} - \oint_S p \mathbf{u} d\mathbf{S} .$$

Первый член справа есть энергия (кинетическая и внутренняя), непосредственно переносимая в единицу времени массой газа, вытекающего через замкнутую поверхность. Второй член представляет собой работу, производимую силами давления над газом, заключенным внутри поверхности.

Используя уравнение непрерывности (3.13) и уравнение движения (3.16), можно преобразовать (3.17) к уравнению для изменения удельной внутренней энергии газа.

$$\rho \frac{dU}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} + p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (3.19)$$

или, с учетом соотношения (1.53), к уравнению для изменения температуры

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} + p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (3.20)$$

где  $c_V = C_V / M$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $M = N_A m$  – молярная масса газа.

Если использовать определение энтальпии (3.18) и соотношение  $dh = c_p dT$ , где  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении, то возможна еще одна форма записи уравнения (3.20)

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{u} = 0. \quad (3.21)$$

### 3.3. Внутреннее трение и теплопроводность

Для того чтобы замкнуть уравнения сохранения, необходимо связать тензор вязких напряжений  $\boldsymbol{\pi}$  с пространственной неоднородностью скорости среды, поскольку именно по этой причине возникает необратимый перенос импульса от одних частей газа к другим. То же самое относится и к тепловому потоку  $\mathbf{q}$ , который возникает при наличии в газе пространственной неоднородности температуры.

Рассмотрим вопрос о *внутреннем трении* или *вязкости* в газе на примере следующей модельной задачи (*течение Куэтта*). Пусть газ находится между двумя параллельными пластинами бесконечных размеров (рис. 3.3). Нижняя пластина неподвижна и находится в плоскости  $yz$  (ось  $Z$  направлена к нам перпендикулярно плоскости чертежа). Верхняя пластина расположена на расстоянии  $x = h$  от нее и движется со скоростью  $u_0$  параллельно нижней в направлении оси  $Y$ .

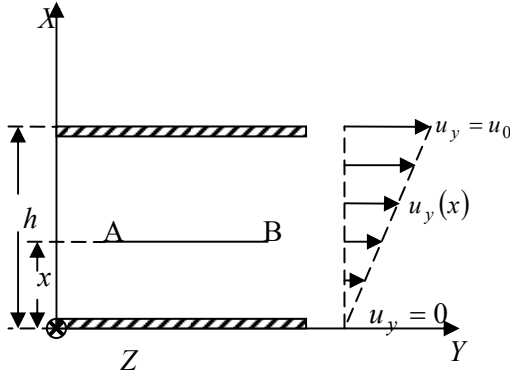


Рис. 3.3

Опыт показывает, что при выполнении условия  $\lambda \ll d$  (малые числа Кнудсена) прилегающий к верхней пластине тонкий слой газа движется практически с той же скоростью, что и сама пластина, а слой, прилегающий к нижней, будет неподвижен. Таким образом, в газе возникает вертикальное распределение скорости течения газа  $u_y(x)$ . Из уравнения движения (3.16) для стационарного движения газа при условии  $p = \text{const}$  и в отсутствие внешних сил следует  $\partial \pi_{yx} / \partial x = 0$  или  $\pi_{yx} = \text{const}$ . Это означает, что вдоль оси  $X$  существует постоянный по величине поток импульса. С ним и связано возникновение силы трения между слоями.

С молекулярной точки зрения происхождение сил внутреннего трения можно объяснить следующим образом. Благодаря движению газа вдоль оси  $Y$ , его молекулы наряду с хаотическим тепловым движением (скорость которого в любом выбранном направлении при усреднении обращается в нуль) обладают скоростью упорядоченного движения и соответствующим ему импульсом  $mu_y(x)$ . Рассмотрим произвольную плоскость  $AB$ , параллельную плоскости пластин и расположенную на высоте  $x$ , которая разделяет пространство между ними на две области (см. рис. 3.3). Молекулы, лежащие над плоскостью  $AB$ , обладают большим импульсом упорядоченного движения, чем молекулы, расположенные под ней. Благодаря тепловому движению молекулы верхнего слоя могут переходить в нижний слой и передавать в результате столкно-

вений часть своего упорядоченного импульса более медленно движущимся молекулам слоя. Это проявляется в том, что газ, расположенный ниже этой плоскости, подвергается действию силы  $F_{yx}$ , направленной в сторону скорости  $u_y$ . Наоборот, более медленные молекулы, попадая из нижнего слоя в верхний, при столкновениях отнимают часть упорядоченного импульса молекул, расположенных над плоскостью  $AB$ . В результате газ в верхнем слое испытывает тормозящую силу ( $-F_{yx}$ ), направленную против скорости  $u_y$ . Эти силы и являются *силами внутреннего* или *вязкого трения*. Они направлены по касательной к поверхности раздела между двумя соприкасающимися слоями и вызывают сдвиг одного слоя относительно другого.

По самому смыслу определения касательного напряжения  $P_{yx}$  (или, что то же самое, тензора вязких напряжений  $\pi_{yx}$ ) оно равно отношению силы  $F_{yx}$ , приложенной по касательной к площади  $S$  между слоями, к величине этой площади, т.е.  $\pi_{yx} = F_{yx} / S$ .

Рассматриваемый пример наглядно подтверждает, что процесс внутреннего трения в газе (и жидкости) возникает только в тех случаях, когда различные участки газа движутся с различными скоростями, поэтому тензор  $\pi_{rs}$  должен зависеть от производных от скорости по координатам. Если градиенты скорости не очень велики, то достаточно хорошим приближением оказывается линейная зависимость  $\pi_{rs}$  от первых производных  $\partial u_r / \partial x_s$ . В нашем конкретном примере имеем линейное соотношение вида

$$\pi_{yx} = -\eta \frac{du_y}{dx}, \quad (3.22)$$

которое соответствует *закону Ньютона* для внутреннего трения. Здесь  $\eta$  – коэффициент вязкости, знак *минус* означает, что перенос импульса направлен в сторону уменьшения скорости. Заметим, что в условиях рассматриваемого нами случая  $\pi_{yx} = \text{const}$  и



$du_y/dx = \text{const}$ . Это означает, что скорость  $u_y$  меняется в пространстве между пластинами по линейному закону, т.е.

$$u_y = (x/h)u_0, \quad \pi_{yx} = \eta u_0/h. \quad (3.23)$$

Наиболее общее линейное соотношение для тензора вязких напряжений имеет вид [4]

$$\pi_{rs} = -2\eta S_{rs}, \quad S_{rs} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right) - \frac{1}{3} \delta_{rs} \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3.24)$$

Величина  $S_{rs}$  соответствует так называемому *тензору скоростей сдвига*, а коэффициент  $\eta$  называют иногда *сдвиговой вязкостью* (другое название, принятое в гидродинамике, – *динамическая вязкость*). Структуру тензора  $S_{rs}$  можно объяснить следующим образом [4]. Очевидно, например, что тензор  $\pi_{rs}$  должен обращаться в нуль в том случае, когда газ как целое совершает равномерное вращение, поскольку при таком движении газа внутреннее трение в нем отсутствует. При равномерном вращении с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , скорость  $\mathbf{u}$  равна векторному произведению  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . При таком определении скорости линейными комбинациями производных

$\partial u_r / \partial x_s$  являются суммы  $\left( \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right)$ , поэтому  $\pi_{rs} \sim S_{rs}$  дол-

жен содержать именно эти симметричные комбинации производных. Наличие в выражении (3.24) члена с множителем  $\delta_{rs}$  связано с тем, что тензор  $\pi_{rs}$  в силу своего определения должен обращаться в нуль при свертывании (т.е. при суммировании компонент  $r = s$ ).

Подставляя соотношение для  $\pi_{rs}$  (3.24) в уравнение (3.16) и предполагая, что коэффициент вязкости  $\eta$  является постоянной величиной, получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \eta \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + n \mathbf{F}, \quad (3.25)$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

соответствует оператору лапласиана. Уравнение (3.25) называется *уравнением Навье-Стокса*. В приближении несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) из уравнения непрерывности (3.13) имеем  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , и в отсутствие внешних сил уравнение движения вязкого газа принимает традиционный вид

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} . \quad (3.26)$$

Рассмотрим в качестве примера применения уравнения (3.26) стационарное медленное течение газа между двумя неподвижными плоскостями (с расстоянием между ними равным  $h$ ) при наличии продольного градиента давления (*течение Пуазейля*). Координаты выберем как и в предыдущем примере, направление оси  $Y$  совпадает с направлением движения газа. Поскольку продольная компонента скорости  $u_y$  зависит только от  $x$ , используя (3.26), получаем

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 . \quad (3.27)$$

Из второго уравнения (3.27) следует, что давление не меняется вдоль оси  $x$ . Тогда в первом уравнении слева стоит функция только от переменной  $y$ , а справа – только от  $x$ . Такое соотношение может иметь место лишь в том случае, если  $dp/dy = \text{const}$ . Решение первого из уравнений при граничных условиях:  $u_y = 0$  при  $x = 0$  и  $x = h$ , приводит тогда к результату

$$u_y = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dy} x(x-h) . \quad (3.28)$$

Таким образом, скорость газа в рассматриваемом случае меняется по сечению канала по параболическому закону, достигая максимума в его средней части. Заметим, что в отличие от предыдущего примера касательные напряжения между слоями или  $\pi_{yx}$  оказы-

ваются не постоянными, а меняются поперек потока по линейному закону. Сила трения, действующая на неподвижную стенку равна

$$\pi_{yx} = -\eta \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{h}{2} \frac{dp}{dy} .$$

Обратимся теперь к вопросу о *переносе тепла* в газе. Необратимый перенос энергии в газе возникает, если температура газа в разных местах оказывается различной. На молекулярном уровне это можно объяснить тем, что различными в этом случае оказываются средние значения тепловой энергии молекул в этих местах. Выделим в газе произвольную плоскую поверхность, разделяющую области с более высокой и более низкой температурой. В результате хаотического движения частиц из более нагретой области в менее нагретую будут переноситься частицы, обладающие в среднем более высокой энергией, чем частицы, переносимые в обратном направлении. Если относительное изменение температуры в газе не слишком велико, плотность потока энергии или тепловой поток  $q_x$  в направлении  $x$ , перпендикулярном выделенной поверхности, оказывается связанными с пространственной производной от температуры линейным соотношением

$$q_x = -\kappa \frac{dT}{dx} , \quad (3.29)$$

где  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности. Величина  $dT/dx$  представляет собой проекцию градиента температуры на направление  $x$ . Общее линейное соотношение для вектора теплового потока  $\mathbf{q}$  имеет вид (закон Фурье)

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T . \quad (3.30)$$

Знак *минус* в этом соотношении означает, что перенос энергии направлен в сторону уменьшения температуры.

Если подставить соотношение (3.30) в уравнение энергии (3.21) и пренебречь диссипацией энергии за счет сил вязкого трения, то в приближении несжимаемой жидкости уравнение, описывающее изменение температуры в газе, принимает вид

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta T . \quad (3.31)$$

В неподвижном газе  $dT/dt = \partial T/\partial t$ , а давление  $p$  можно считать постоянным. Тогда уравнение (3.31) переходит в известное уравнение теплопроводности или уравнение Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (3.32)$$

где  $\chi = \kappa/\rho c_p$  – коэффициент температуропроводности.

Уравнение теплопроводности (3.32) относится к уравнениям, которые в математической физике называются *уравнениями параболического типа*. Решения этого уравнения при задании конкретных начальных и граничных условий описывают временное и пространственное распределение температуры в среде при наличии переноса тепла за счет теплопроводности. Анализ решений приводит, в частности, к следующему результату. Пусть газ в начальный момент оказывается неравномерно нагретым и занимает объем, характерный размер которого равен  $L$ . Тогда можно утверждать, что порядок величины времени  $\tau$ , в течение которого произойдет заметное выравнивание температуры в различных точках этого объема, равен

$$\tau \sim \frac{L^2}{\chi}.$$

Это означает, что время  $\tau$ , которое можно назвать *временем релаксации для процесса теплопроводности*, пропорционально квадрату характерного размера задачи и обратно пропорционально коэффициенту температуропроводности газа.

### 3.4. Уравнения сохранения в газовой смеси

В основу вывода уравнений сохранения для произвольной многокомпонентной газовой смеси могут быть положены уравнения баланса массы, импульса и энергии для отдельного компонента смеси. Уравнение непрерывности (уравнение сохранения числа частиц) для отдельного компонента записывается в этом случае в виде

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot n_\alpha \mathbf{u}_\alpha. \quad (3.33)$$

Ему соответствует уравнение сохранения массы компонента

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha . \quad (3.34)$$

Здесь  $n_\alpha$  и  $\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$  – плотность числа частиц (число частиц в единице объема) и массовая плотность компонента  $\alpha$  соответственно,  $\mathbf{u}_\alpha$  – макроскопическая (упорядоченная) скорость частиц сорта  $\alpha$ , определяемая выражением

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \mathbf{v}_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha . \quad (3.35)$$

Уравнение сохранения массы для смеси в целом получается суммированием уравнения (3.34) по всем компонентам

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{u} . \quad (3.36)$$

Здесь  $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$  – массовая плотность смеси, а среднемассовая скорость смеси  $\mathbf{u}$  определена как

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha . \quad (3.37)$$

Структура уравнений движения и энергии для газовой смеси подобна структуре обсуждавшихся выше уравнений сохранения для простого газа. В основе их вывода лежат уравнения баланса импульса и энергии для отдельного компонента. При этом следует иметь в виду некоторое отличие в определении ряда макроскопических величин в уравнениях для отдельных компонентов и для смеси в целом.

Рассмотрим в качестве примера уравнение баланса импульса для компонента  $\alpha$ , которое по аналогии с уравнением (3.15) для простого газа можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{P}_\alpha^* + \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + n_\alpha \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha . \quad (3.38)$$

Здесь  $\mathbf{F}_\alpha$  – *внешняя сила*, действующая на частицу сорта  $\alpha$ . По сравнению со случаем простого газа здесь существенно присутствие в правой части (3.38) величины  $\mathbf{R}_\alpha$ , которая представляет собой среднее значение импульса, передаваемого при столкновениях

частиц сорта  $\alpha$  с частицами других сортов. Вычисление этой величины при определенных предположениях относительно вида функции распределения частиц будет рассмотрено нами позднее (см. главу 4).

Фигурирующий в уравнении (3.38) парциальный тензор напряжений  $\mathbf{P}_\alpha^*$  определен относительно системы отсчета, скорость которой равна макроскопической скорости компонента  $\mathbf{u}_\alpha$ . При записи его с помощью функции распределения молекул сорта  $\alpha$  по скоростям  $f_\alpha$  выражение для этой величины принимает вид

$$\mathbf{P}_\alpha^* = m_\alpha \int (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha .$$

При переходе к уравнению сохранения импульса для газовой смеси в целом оказывается более целесообразным использовать выражения для парциальных тензоров напряжений, определенных в системе отсчета, связанной со средне-массовой скоростью смеси  $\mathbf{u}$  (3.37), так что

$$\mathbf{P}_\alpha = m_\alpha \int (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u})(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}) f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha . \quad (3.39)$$

(Именно такое определение принято в обычной кинетической теории газовых смесей [10,11]).

Рассматриваемые величины связаны очевидным соотношением

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha^* + \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha , \quad (3.40)$$

где  $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}$  – диффузионная скорость частиц сорта  $\alpha$ , определяемая в системе отсчета, движущейся со среднemasсовой скоростью. В результате уравнение (3.38) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot [\mathbf{P}_\alpha + \rho_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u} \mathbf{u})] + n_\alpha \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha . \quad (3.38')$$

Суммирование уравнений (3.38') по всем компонентам с учетом (3.37) приводит к результату

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{P} + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \sum_\alpha n_\alpha \mathbf{F}_\alpha . \quad (3.41)$$

При этом использовано условие

$$\sum_\alpha \mathbf{R}_\alpha = 0 , \quad (3.42)$$

которое для смеси в целом следует из законов сохранения импульса в столкновениях частиц. С помощью уравнения непрерывности уравнение (3.41) легко преобразуется к виду

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = 0 . \quad (3.43)$$

Здесь использовано обычное определение тензора напряжений

$$\mathbf{P} = p \mathbf{I} + \boldsymbol{\pi} , \quad (3.44)$$

где давление  $p$  и тензор вязких напряжений  $\boldsymbol{\pi}$  газовой смеси определяются суммированием по  $\alpha$  соответствующих парциальных величин.

$$p = \sum_{\alpha} p_{\alpha} , \quad \boldsymbol{\pi} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\pi}_{\alpha} . \quad (3.45)$$

Уравнение (3.43) носит название *уравнения движения газовой смеси*.

Аналогичным образом на основе уравнения баланса энергии отдельного компонента с последующим суммированием по индексу  $\alpha$  может быть получено уравнение сохранения энергии для газовой смеси. Мы запишем его сразу в виде уравнения для изменения удельной внутренней энергии газовой смеси [9,10]

$$\rho \frac{dU}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} + p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{u} - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha} = 0 , \quad (3.46)$$

где

$$U = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle E_{\alpha} \rangle = \frac{1}{\rho} n \langle E \rangle . \quad (3.47)$$

При этом средняя тепловая энергия единицы объема газовой смеси  $n \langle E \rangle$  определена выражением (1.79). Тепловой поток в смеси  $\mathbf{q}$  находится суммированием соответствующих парциальных величин.

$$\mathbf{q} = \sum_{\alpha} \mathbf{q}_{\alpha} . \quad (3.48)$$

Парциальные тепловые потоки (без учета внутренних степеней свободы молекул) определены при этом как

$$\mathbf{q}_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} \int c_{\alpha}^2 \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{c}_{\alpha} . \quad (3.49)$$

Если учитываются внутренние степени свободы молекул, то [2]

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \sum_i \int \left( \frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2 + E_{ai} \right) \mathbf{c}_\alpha f_\alpha(c_\alpha, E_{ai}) d\mathbf{c}_\alpha . \quad (3.49)$$

Заметим, что  $\mathbf{q}_\alpha$  (3.49) обращается в нуль, если  $f_\alpha$  соответствует равновесной или локально-равновесной максвелловской функции распределения.

Уравнения сохранения (3.43) и (3.46) несколько упрощаются, если силы, действующие на любую частицу газовой смеси, пропорциональны массе частицы. Например, при  $\mathbf{F}_\alpha = m_\alpha \mathbf{g}$  имеем  $\sum_\alpha n_\alpha \mathbf{F}_\alpha = \rho \mathbf{g}$ , а последний член в левой части (3.46) обращается в нуль благодаря выполнению условия (3.58) (см. следующий параграф) Записывая вместо (3.46) уравнение для изменения температуры  $T$ , приходим к полной системе уравнений сохранения смеси в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 , \quad (3.50)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} - \rho \mathbf{g} = 0 , \quad (3.51)$$

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} + p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{u} = 0 , \quad (3.52)$$

где  $c_V = C_V / \bar{M}$  - удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме,  $\bar{M} = N_A \bar{m} = N_A \rho / n$ . Молярная теплоемкость смеси в общем случае определяется выражением (1.81) главы 1. Для того чтобы замкнуть систему уравнений (3.50)–(3.52) необходимо дополнить ее уравнением состояния смеси идеальных газов

$$p = \frac{\rho}{m} k T = \frac{\rho}{M} RT , \quad (3.53)$$

а также линейными соотношениями для тензора вязких напряжений смеси  $\pi_{rs}$  и теплового потока  $\mathbf{q}$ .

Для тензора  $\pi_{rs}$  линейное соотношение имеет формально тот же вид (3.24), что и в случае простого газа, т.е.

$$\pi_{rs} = -2\eta S_{sr} , \quad (3.54)$$



где вязкость смеси  $\eta$  определяется суммой парциальных вязкостей компонентов (не путать с вязкостью чистых компонентов)

$$\eta = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha} . \quad (3.55)$$

Тепловой поток  $\mathbf{q}$  в случае смеси имеет более сложную структуру, чем в случае простого газа. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в параграфе 3.6.

### 3.5. Диффузия в газовой смеси

Важным отличием газовой смеси от простого газа является то, что наряду с необратимым переносом импульса и энергии в ней имеет место необратимый перенос массы, связанный с диффузией компонентов. Говорят, что два компонента газовой смеси диффундируют относительно друг друга, если макроскопические скорости компонентов отличаются, т.е. если разность  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  не равна нулю.

Процесс диффузии компонентов смеси удобно характеризовать, вводя понятие диффузионного потока частиц сорта  $\alpha$ , который выражается через макроскопическую скорость частиц данного сорта, определяемую в системе отсчета, движущейся с некоторой средней скоростью смеси как целого. При рассмотрении диффузии обычно вводятся две такие системы отсчета. Одна из них связана со среднемассовой скоростью смеси  $\mathbf{u}$ , (см. выражение (3.37)) Массовый диффузионный поток частиц сорта  $\alpha$  определяется в этом случае как

$$\mathbf{J}_{\alpha} = \rho_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}) = \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} . \quad (3.56)$$

С помощью функции распределения эта величина записывается в виде

$$\mathbf{J}_{\alpha} = m_{\alpha} \int \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{c}_{\alpha} . \quad (3.57)$$

В силу определения среднемассовой скорости (3.37) потоки  $\mathbf{J}_{\alpha}$  удовлетворяют условию

$$\sum_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0 . \quad (3.58)$$

Другая система отсчета может быть связана с так называемой средней молярной скоростью

$$\mathbf{u}^m = \frac{1}{n} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} . \quad (3.59)$$

Соответствующий молярный диффузионный поток определяется выражением

$$\mathbf{J}_{\alpha}^m = n_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}^m) . \quad (3.60)$$

Массовый диффузионный поток  $\mathbf{J}_{\alpha}$  входит, как мы видели, в систему уравнений сохранения смеси, и его удобно поэтому использовать при решении общих газодинамических задач. Использование диффузионного потока  $\mathbf{J}_{\alpha}^m$  оказывается более удобным для описания процессов диффузии и переноса тепла в покоящемся газе или в случае медленных течений газовых смесей.

Далее для простоты будем рассматривать случай лишь двухкомпонентной (бинарной) газовой смеси. Введем определения относительных концентрации компонентов в смеси. Молярные концентрации компонентов 1 и 2 определяются как

$$x_1 = \frac{n_1}{n} , \quad x_2 = 1 - x_1 , \quad (3.61)$$

а массовые концентрации как

$$c_1 = \frac{\rho_1}{\rho} , \quad c_2 = 1 - c_1 . \quad (3.62)$$

Заметим, что концентрации  $c_{\alpha}$  и  $x_{\alpha}$  связаны соотношением

$$c_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} x_{\alpha}}{\sum_{\beta} m_{\beta} x_{\beta}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) . \quad (3.63)$$

Нетрудно убедиться, что молярные диффузионные потоки компонентов смеси в нашем случае можно представить в виде

$$\mathbf{J}_1^m = n_1 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}^m) = n x_1 x_2 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) , \quad \mathbf{J}_2^m = -\mathbf{J}_1^m , \quad (3.64)$$

а массовые диффузионные потоки в виде

$$\mathbf{J}_1 = \rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}) = \rho c_1 c_2 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \quad \mathbf{J}_2 = -\mathbf{J}_1. \quad (3.65)$$

Как видно, и тот и другой диффузионные потоки выражаются через разности макроскопических скоростей компонентов.

Приведем еще одно полезное соотношение, следующее из (3.63),

$$c_1 c_2 = m_1 m_2 \frac{n^2}{\rho^2} x_1 x_2. \quad (3.66)$$

Тогда с учетом определений (3.64) и (3.65) находим, что диффузионные потоки  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_1^m$  связаны как

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\rho c_1 c_2}{n x_1 x_2} \mathbf{J}_1^m = \frac{n m_1 m_2}{\rho} \mathbf{J}_1^m. \quad (3.67)$$

Полезно пояснить еще раз физический смысл введенных нами величин на примере молярных потоков в смеси. Потоками частиц в этом случае мы называем для краткости *плотности потоков частиц*, т.е. число частиц данного сорта, пересекающих единичную поверхность в единицу времени. Для молярных потоков компонентов  $n_1 \mathbf{u}_1$  и  $n_2 \mathbf{u}_2$  в соответствии с определениями (3.59) и (3.60) можно записать выражения

$$n_1 \mathbf{u}_1 = n \mathbf{u}^m x_1 + \mathbf{J}_1^m, \quad n_2 \mathbf{u}_2 = n \mathbf{u}^m x_2 + \mathbf{J}_2^m. \quad (3.68)$$

Это означает, что молярный поток компонента складывается из конвективного переноса частиц данного сорта вместе с потоком газовой смеси как целого (который пропорционален относительной концентрации компонента в смеси) и диффузионного переноса частиц данного сорта. Аналогичные соображения справедливы и при анализе выражений для массовых потоков компонентов.

Если относительное изменение плотности данного компонента в газе не слишком велико, для молярного диффузионного потока можно записать линейное соотношение, связывающее его с градиентом парциальной плотности компонента

$$\mathbf{J}_1^m = -D_{12} \nabla n_1 \quad (3.69)$$

или, если плотность числа частиц смеси  $n$  постоянна,

$$\mathbf{J}_1^m = -n D_{12} \nabla x_1. \quad (3.70)$$

Коэффициент  $D_{12}$  называется коэффициентом *бинарной* или *взаимной диффузии*. Знак минус в этих выражениях означает, что перенос вещества (диффузия компонента) происходит в сторону падения концентрации. Соотношение (3.70) иногда называют *первым законом Фика*.

В общем случае диффузионный поток может линейно зависеть также от градиента давления (*бародиффузия*) и градиента температуры (*термодиффузия*). В частности, для бинарной смеси газов общее выражение для  $\mathbf{J}_1^m$ , которое обосновывается как методами *термодинамики необратимых процессов* [9], так и *строгой кинетической теорией* [1,10,11], может быть представлено в виде

$$\mathbf{J}_1^m = -n[D_{12}]_1[\nabla x_1 + k_p \nabla \ln p + k_T \nabla \ln T]. \quad (3.71)$$

Коэффициенты  $k_p$  и  $k_T$  носят название *бародиффузионного* и *термодиффузионного отношения*. Более подробно соответствующие выражения для этих коэффициентов будут обсуждаться в главе 6.

Используем теперь уравнение непрерывности (3.33). Записывая его для компонента 1 и учитывая соотношение (3.68), имеем

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_1 \mathbf{u}^m + \mathbf{J}_1^m). \quad (3.72)$$

Полагая  $n_1 = nx_1$ , можно исключить в этом уравнении производную по времени  $\partial n/\partial t$  с помощью уравнения непрерывности для смеси в целом, которое для молярных переменных имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot n\mathbf{u}^m. \quad (3.73)$$

После подстановки в полученное уравнение выражения для диффузионного потока (3.70), приходим к результату

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} + \mathbf{u}^m \cdot \nabla x_1 = D_{12} \Delta x_1. \quad (3.74)$$

Если молярный перенос газовой смеси как целого отсутствует ( $\mathbf{u}^m = 0$ ), получаем

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = D_{12} \Delta x_1 . \quad (3.74')$$

Уравнение (3.74') называют *вторым законом Фика*.

Аналогичные уравнения могут быть получены и при использовании массового диффузионного потока  $\mathbf{J}_1$ . Используя соотношение (3.66), имеем

$$\mathbf{J}_1 = -m_1 m_2 \frac{n^2}{\rho} D_{12} \nabla x_1 . \quad (3.75)$$

Выражая градиент  $\nabla x_1$  через градиент  $\nabla c_1$  с помощью (3.63), приходим к соотношению

$$\mathbf{J}_1 = -\rho D_{12} \nabla c_1 , \quad (3.76)$$

которое аналогично первому закону Фика (3.70), но записывается в массовых, а не в молярных переменных. Если подставить теперь  $\mathbf{J}_1$  в уравнение непрерывности в форме (3.34) и исключить из него производную  $\partial \rho / \partial t$  с помощью уравнения непрерывности для смеси в целом (3.35), то приходим к уравнению

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_{12} \Delta c_1 \quad (3.77)$$

с тем же самым коэффициентом бинарной диффузии  $D_{12}$ . Здесь для простоты предполагается, что  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Уравнение (3.77) имеет, очевидно, ту же форму, что и уравнение (3.74'), но записывается в других переменных ( $c_1$  вместо  $x_1$ ).

Заметим, что уравнения (3.77) и (3.74'), как и уравнение теплопроводности (3.32), относятся к уравнениям *параболического типа*. Используя аналогию с результатами, описывающими выравнивание температуры в газе, можно утверждать, что изменение концентрации в газовой смеси, занимающей объем, характерный размер которого равен  $L$ , происходит по тому же закону. Это означает, что порядок величины времени  $\tau$ , в течение которого произойдет заметное выравнивание концентрации в различных точках этого объема, равен

$$\tau_D = \frac{L^2}{D_{12}}, \quad (3.78)$$

т.е. время  $\tau_D$ , которое можно назвать *временем релаксации для процесса диффузии*, пропорционально квадрату характерного размера задачи и обратно пропорционально коэффициенту диффузии в газовой смеси.

### 3.6. Тепловой поток в газовой смеси

Как уже отмечалось, выражение для теплового потока  $\mathbf{q}$  в случае смеси имеет более сложную структуру, чем в случае простого газа. Вклад в него, связанный с наличием градиента температуры, можно по аналогии с (3.29) представить как

$$\mathbf{q}_T = -\kappa \nabla T, \quad (3.79)$$

где теплопроводность смеси  $\kappa$  равна сумме парциальных теплопроводностей компонентов

$$\kappa = \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha}. \quad (3.80)$$

В общем случае, однако, вектор теплового потока содержит члены, зависящие также от диффузионных скоростей компонентов смеси. Один из этих вкладов возникает из-за выбора системы отсчета, в которой рассматривается перенос тепла. В соответствии с общим определением теплового потока (3.48) и парциальных тепловых потоков (3.49) скорости молекул, от которых зависит функция распределения, определены относительно *среднемассовой скорости* смеси  $\mathbf{u}$ . Однако перенос тепла через некоторую поверхность в газовой смеси, вызванный неоднородностью температуры, рассматривается обычно в условиях, когда число молекул, пересекающих единичную поверхность в единицу времени с той и другой стороны, одинаково. Это означает, что эта часть теплового потока должна определяться относительно системы отсчета, движущейся со *среднемолярной скоростью* смеси  $\mathbf{u}^m$ . Для того чтобы определять тепловые потоки относительно одной выбранной системы отсчета, необходимо установить связь между различными представлениями потоков.

Будем исходить из следующего общего определения величин, усредненных на функции распределения,

$$\langle F_\alpha \rangle = \frac{1}{n_\alpha} \int F_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha .$$

Определяя парциальный тепловой поток компонента  $\alpha$  относительно *среднемолярной скорости смеси*, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\alpha^m &= \frac{1}{2} \rho_\alpha \langle (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}^m)(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}^m)^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \rho_\alpha \langle (\mathbf{c}_\alpha - \Delta \mathbf{u})(\mathbf{c}_\alpha - \Delta \mathbf{u})^2 \rangle . \end{aligned} \quad (3.81)$$

Здесь введены обозначения  $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$  и  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^m - \mathbf{u}$ .

Преобразуем выражение (3.81), полагая, что  $\Delta \mathbf{u}$  мало и поэтому можно пренебречь квадратичными относительно этой величины членами. В результате (3.81) принимает вид

$$\mathbf{q}_\alpha^m = \frac{1}{2} \rho_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha c_\alpha^2 \rangle - \rho_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{2} \rho_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle \Delta \mathbf{u} .$$

Первый член справа есть обычный вектор парциального теплового потока  $\mathbf{q}_\alpha$ , определяемый в системе отсчета, движущейся со скоростью  $\mathbf{u}$ . Величину  $\langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle$  можно с хорошим приближением заменить средним значением  $\langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle_0$ , вычисляемым на максвелловской функции распределения, т.е.  $\langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle_0 = p_\alpha \mathbf{I}$ . Наконец, коэффициент перед  $\Delta \mathbf{u}$  в последнем члене в соответствии с определением средней энергии частиц сорта  $\alpha$  в единице объема газа равен  $(3/2)p_\alpha$ . В итоге имеем

$$\mathbf{q}_\alpha^m = \mathbf{q}_\alpha - \frac{5}{2} p_\alpha \Delta \mathbf{u} . \quad (3.82)$$

Прежде чем просуммировать (3.82) по  $\alpha$ , заметим, что

$$\sum_\alpha p_\alpha \Delta \mathbf{u} = \sum_\alpha p_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}) = \sum_\alpha p_\alpha \mathbf{w}_\alpha .$$

В результате

$$\mathbf{q} = \sum_{\alpha} \mathbf{q}_{\alpha} = \mathbf{q}^m + \frac{5}{2} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \quad (3.83)$$

или

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T + \frac{5}{2} kT \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} . \quad (3.84)$$

Фактически это означает, что при таком определении теплового потока в смеси газов дополнительно к обычному переносу тепла за счет градиента температуры возникает перенос, связанный с диффузией компонентов смеси, причем каждая молекула несет в среднем  $(5/2)kT$  тепловой энергии. Выражение (3.84) справедливо, вообще говоря, для газовой смеси одноатомных газов. При наличии у молекул внутренних степеней свободы соответствующее обобщение рассмотренного выше вывода приводит к результату

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T + \sum_{\alpha} \left( \frac{5}{2} + \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle \right) p_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} , \quad (3.85)$$

где  $\langle \varepsilon_{\alpha} \rangle$  определено выражением (1.80).

Еще один вклад в тепловой поток, следующий из известных результатов неравновесной термодинамики [9] и строгой кинетической теории [10,11], оказывается перекрестным по отношению к термодиффузионному вкладу в выражении для диффузионного потока. В частности, для бинарной газовой смеси окончательное выражение для теплового потока принимает вид [11].

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T + \frac{5}{2} kT (n_1 \mathbf{w}_1 + n_2 \mathbf{w}_2) + p k_T (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2), \quad (3.86)$$

где  $k_T$  – термодиффузионное отношение, которое уже вводилось нами при определении диффузионного потока (3.71). То обстоятельство, что коэффициент при градиенте температуры в выражении для диффузионного потока и коэффициент при разности диффузионных скоростей в выражении для теплового потока пропорциональны одному и тому же кинетическому коэффициенту  $k_T$ , оказывается прямым следствием выполнения известных *соотношений симметрии Онзагера*. Эти соотношения являются одним из важных исходных положений неравновесной термодинамики [9].



## ГЛАВА 4. СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В ГАЗЕ И ПЛАЗМЕ

Условия идеальности газа и плазмы предполагают, что основную часть времени составляющие их частицы проводят в свободном движении и взаимодействуют лишь в короткие моменты их сближения (столкновения). При описании столкновений нейтральных частиц между собой и заряженных частиц с нейтральными это соответствует возможности рассматривать лишь *парные соударения* частиц, когда взаимодействие с другими окружающими частицами не влияет на характер столкновения выбранной пары. Для взаимодействия заряженных частиц в плазме, которое является дальнедействующим, концепция парного столкновения может быть введена лишь с известными допущениями. Этот вопрос мы обсудим ниже в соответствующем параграфе настоящей главы.

Столкновения частиц в газе и плазме играют решающую роль в установлении равновесных распределений частиц по их скоростям и внутренним состояниям. В обычном одноатомном газе оказываются существенными лишь упругие столкновения атомов, в результате которых скорости их движения меняются как по величине, так и по направлению, но суммарные импульс и кинетическая энергия пары взаимодействующих частиц при этом сохраняются. Следствием этого является установление *равновесного максвелловского распределения* частиц по скоростям. В газе, образованном из двухатомных и многоатомных молекул, наряду с изменением скорости частиц происходят изменения внутреннего состояния молекул, обусловленные наличием у них вращательных и колебательных степеней свободы. В этом случае наряду с упругими имеют место неупругие столкновения частиц, сопровождающиеся переходом части поступательной энергии молекул в энергию их внутреннего движения. Равновесному состоянию такого газа соответствует *максвелл-больцмановское распределение* по скоростям и внутренним энергиям молекул, которое рассматривалось нами в главе 1. В результате химических реакций (например, диссоциации молекул) в дополнение к рассмотренным эффектам может изменяться распределение частиц по сортам. Столкновения частиц в этом случае являются существенно неупругими.

Элементарные процессы в плазме, соответствующие упругим и неупругим столкновениям с участием атомов, молекул, ионов и

электронов, а также фотонов, оказываются гораздо более многообразными, чем в обычном газе. Многие из этих процессов (особенно неупругие столкновения) определяют характер равновесных и неравновесных распределений связанных и свободных частиц плазмы. Именно неупругими столкновениями частиц в плазме определяются такие процессы как возбуждение и девозбуждение атомов и молекул, ионизация и рекомбинация, ионно-молекулярные реакции и т.п..

При анализе *явлений переноса* в газах и плазме основное внимание уделяется рассмотрению упругих столкновений частиц. Это связано с тем, что именно упругие столкновения вносят основной вклад в определение эффективных сечений рассеяния частиц и характерных макроскопических частот столкновений, которыми и определяются в конечном счете значения коэффициентов переноса. Поэтому ниже рассматривается динамика упругих атом-атомных и ион-атомных столкновений, а также кулоновских столкновений заряженных частиц (электронов и ионов). Ко всем этим случаям (за исключением случая резонансной перезарядки иона на собственном атоме) оказываются полностью применимыми классические методы расчета соответствующих сечений рассеяния. Для процессов столкновений частиц с участием молекул вклад неупругих процессов в суммарное сечение рассеяния часто оказывается малым по сравнению с упругими столкновениями, поэтому в ряде случаев к их описанию также оказываются приближенно применимыми рассматриваемые ниже результаты. Конкретные ситуации, где учет неупругих процессов при столкновении молекул оказывается важным, будут оговорены позднее.

При анализе электронных свойств переноса в слабоионизованной плазме особую роль играют сечения электрон-атомных и электрон-молекулярных столкновений. Хотя общие уравнения сохранения импульса и энергии при столкновениях частиц оказываются справедливыми и в этом случае, расчет соответствующих сечений рассеяния возможен лишь на основе квантово-механического рассмотрения. Другой способ состоит в использовании экспериментально определяемых зависимостей эффективных сечений рассеяния электронов на атомах и молекулах от энергии налетающего электрона.

#### 4.1. Динамика упругого парного столкновения частиц

Общие закономерности упругого столкновения частиц могут быть рассмотрены на основе законов сохранения импульса и энергии системы частиц без учета конкретного вида взаимодействия между ними. Для парного столкновения частиц разного сорта с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответствующие законы сохранения записываются в виде

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2, \quad (4.2)$$

где штрихом отмечены значения скоростей после столкновения. При этом понятия “до” и “после” столкновения соответствуют начальному и конечному этапу свободного движения частиц, когда влияние взаимодействия частиц на их движение оказывается несущественным.

Удобно ввести скорость центра масс пары частиц, которая остается постоянной в процессе столкновения,

$$\mathbf{G} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2}{m_1 + m_2} \quad (4.3)$$

и относительные скорости частиц до и после столкновения

$$\mathbf{g} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{g}' = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1. \quad (4.4)$$

В этих переменных

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}_1 &= m_1 \mathbf{G} - \mu_{12} \mathbf{g}, & m_1 \mathbf{v}'_1 &= m_1 \mathbf{G} - \mu_{12} \mathbf{g}', \\ m_2 \mathbf{v}_2 &= m_2 \mathbf{G} + \mu_{12} \mathbf{g}, & m_2 \mathbf{v}'_2 &= m_2 \mathbf{G} + \mu_{12} \mathbf{g}'. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.6)$$

приведенная масса частиц, участвующих в столкновении.

Подстановка соотношений (4.5) в уравнение (4.2) дает

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) G^2 + \frac{1}{2} \mu_{12} g^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) G^2 + \frac{1}{2} \mu_{12} g'^2.$$

Кинетическая энергия центра масс остается неизменной, а равенство кинетической энергии относительного движения частиц до и после столкновения приводит к условию

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}' , \quad (4.7)$$

т.е. в результате столкновения вектор относительной скорости  $\mathbf{g}$  поворачивается и переходит в  $\mathbf{g}'$ , но модули этих векторов  $g = |\mathbf{g}|$  остаются неизменными.

Поворот вектора относительной скорости определяется двумя углами  $\chi$  и  $\varphi$ , вводимыми в сферической системе координат (рис. 4.1). Полярный угол  $\chi$  называется *углом рассеяния*. Он является углом между векторами  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{g}'$  в плоскости, образованной этими векторами. Азимутальный угол  $\varphi$  определяет положение этой плоскости относительно некоторой фиксированной плоскости, проходящей через  $\mathbf{g}$  (в данном случае плоскость чертежа рис. 4.1).

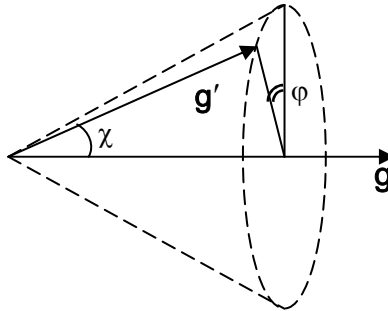


Рис. 4.1

Связь между векторами  $\mathbf{g}'$  и  $\mathbf{g}$  можно определить тогда соотношением

$$\mathbf{g}' = g\mathbf{i} \cos \chi + g\mathbf{j} \sin \chi \cos \varphi + g\mathbf{k} \sin \chi \sin \varphi , \quad (4.8)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – взаимно перпендикулярные единичные векторы, причем вектор  $\mathbf{g}$  направлен вдоль  $\mathbf{i}$ .

Заметим, что изменение импульса каждой частицы в результате столкновения равно

$$\Delta \mathbf{p}_1 = m_1 (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1) = \mu_{12} (\mathbf{g} - \mathbf{g}') = -\Delta \mathbf{p}_2 . \quad (4.9)$$

В случае центрально-симметричного потенциала взаимодействия частиц угол  $\varphi$  зависит только от взаимного расположения сталкивающихся частиц, поэтому при статистическом рассмотрении столкновений для определения средней передачи импульса по азимутальному углу можно произвести усреднение. Поскольку  $\langle \cos \varphi \rangle = \langle \sin \varphi \rangle = 0$ , получаем

$$\langle \Delta \mathbf{p}_1 \rangle = - \langle \Delta \mathbf{p}_2 \rangle = \mu_{12} \mathbf{g} (1 - \cos \chi) . \quad (4.10)$$

Аналогичным образом можно показать, что средняя передача энергии при столкновениях частиц определяется выражением [8,13]

$$\langle \Delta E^{tr} \rangle = \kappa_{12} (1 - \cos \chi) \left( \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} \right) , \quad (4.11)$$

где

$$\kappa_{12} = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} .$$

В качестве характерного примера рассмотрим частный случай, когда массы сталкивающихся частиц резко различаются ( $m_1 \ll m_2$ ). Это имеет прямое отношение, например, к случаю упругого столкновения электрона с атомами или ионами. Положение центра масс при этом фактически совпадает с положением тяжелой частицы, относительная скорость практически равна скорости электрона, а приведенная масса – массе электрона. Выражения для средней передачи импульса и энергии электрона принимают тогда вид

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{p}_e \rangle &= m_e \mathbf{v}_e (1 - \cos \chi) , \\ \langle \Delta E^{tr} \rangle &= \frac{2m_e}{m} \left( \frac{m_e v_e^2}{2} \right) (1 - \cos \chi) . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из этих соотношений следует, что величина относительной потери импульса электрона при его столкновении с тяжелой частицей имеет порядок единицы, а относительное изменение его энергии пропорционально малому отношению масс электрона и атома или иона.

#### 4.2. Сечения рассеяния и эффективные сечения столкновений частиц

Для дальнейшего обсуждения полезно ввести понятие дифференциального сечения рассеяния. Рассмотрим однородный пучок частиц, налетающих на силовой центр с начальной скоростью  $\mathbf{g}$  и имеющих все возможные значения прицельного параметра  $b$  (рис. 4.2). Число частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varphi$ , пропорционально плотности потока частиц в пучке  $I_0$  и величине  $d\Omega$ . Тогда дифференциальное сечение рассеяния  $\sigma(g, \Omega)$  определяется таким образом, что величина  $I_0 \sigma d\Omega$  равна числу частиц, рассеиваемых за 1 с в элемент телесного угла  $d\Omega$ .

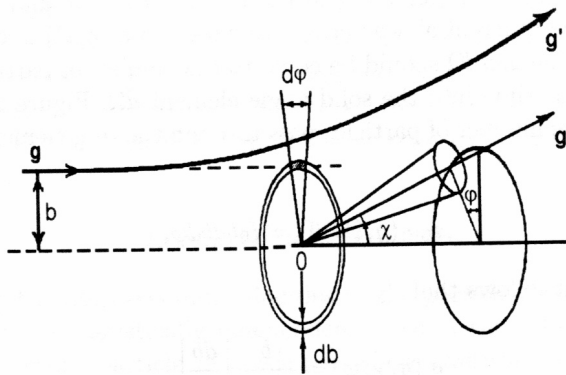


Рис. 4.2

Из рис. 4.2 видно, что такое же число частиц проходит через элемент кольца  $bdbd\varphi$ , поэтому

$$I_0 \sigma(g, \Omega) d\Omega = I_0 b db d\varphi,$$

откуда следует

$$\sigma(g, \chi, \varphi) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \quad (4.13)$$

Значение производной  $db/d\chi$  берется по модулю, поскольку сечение рассеяния  $\sigma$  должно быть положительной величиной.

Заметим, что для частиц, рассматриваемых как точечные центры сил, из-за сферической симметрии потенциала взаимодействия частиц дифференциальное сечение рассеяния  $\sigma$  не зависит от азимутального угла  $\varphi$ , т.е. оказывается функцией только модуля относительной скорости частиц  $g$  и угла рассеяния  $\chi$ .

В дальнейшем нас будут интересовать эффективные сечения столкновений, проинтегрированные по углам рассеяния. К их числу относится, например, транспортное сечение столкновений двух частиц  $Q_{12}^{(1)}(g)$

$$Q_{12}^{(1)}(g) = \int_{\Omega} \sigma_{12}(g, \chi)(1 - \cos \chi) d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_{12}(g, \chi)(1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi. \quad (4.14)$$

Появление под интегралом (4.14) весового множителя  $(1 - \cos \chi)$  оказывается вполне естественным в связи с обсуждавшимся выше выражением (4.10) для средней передачи импульса при столкновении частиц. Очевидно, что  $Q_{12}^{(1)}(g)$  является мерой среднего *направленного вперед* импульса, теряемого частицами сорта 1 при столкновениях с частицами сорта 2, поэтому эту величину иногда называют *сечением с передачей импульса* или *диффузионным сечением* рассеяния. Физическое объяснение последнему названию связано с тем, что весовой множитель  $(1 - \cos \chi)$  дает наибольший вклад при рассеянии назад ( $\chi \approx \pi$ ), а именно такими столкновениями сильнее всего задерживается диффузия частиц

В общем случае в выражениях для коэффициентов переноса встречаются также транспортные сечения произвольного  $\ell$ -го порядка ( $\ell$  – целое положительное число)

$$Q_{12}^{(\ell)}(g) = \int_{\Omega} \sigma_{12}(g, \chi)(1 - \cos^{\ell} \chi) d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_{12}(g, \chi)(1 - \cos^{\ell} \chi) \sin \chi d\chi, \quad (4.15)$$

в частности, важными оказываются эффективные сечения, для которых  $\ell = 2$ , или

$$Q_{12}^{(2)}(g) = \int_{\Omega} \sigma_{12}(g, \chi) (1 - \cos^2 \chi) d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_{12}(g, \chi) \sin^3 \chi d\chi. \quad (4.16)$$

Легко заметить, что наибольший вклад в эффективное сечение рассеяния вносят в этом случае столкновения с рассеянием на угол  $\chi \approx \pi/2$ , а именно со средней *поперечной передачей импульса* связаны, как мы увидим, явления вязкости и теплопроводности газа.

### 4.3. Динамическая задача рассеяния для упругого столкновения частиц

При конкретном вычислении эффективных сечений  $Q_{12}^{(\ell)}(g)$  необходимо сначала установить явный вид зависимости для дифференциального сечения рассеяния  $\sigma_{12}(g, \chi)$ . Для этого, как следует из выражения (4.13), достаточно для каждого конкретного типа столкновений найти зависимость угла рассеяния  $\chi$  от прицельного параметра  $b$  и относительной скорости  $g$ .

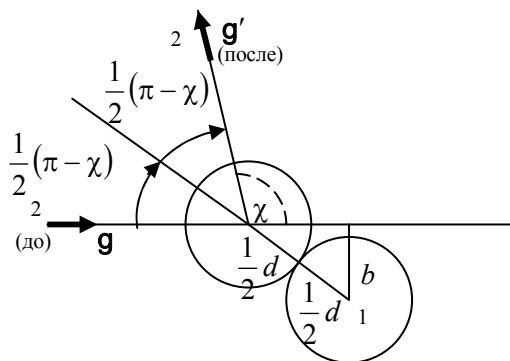


Рис. 4.3

Рассмотрим сначала случай упругого столкновения двух твердых сфер с одинаковыми диаметрами  $d$  (рис. 4.3). В этом случае вид зависимости  $\chi(b, g)$  можно установить, исходя из чисто геометрических соображений. Пусть две сферы сближаются, имея относительную скорость  $g$ , при этом расстояние между линиями центров (прицельное расстояние) равно  $b$ . В момент соударения сила, дей-



ствущая между ними, направлена по линии, соединяющей центры сфер. Составляющая скорости  $\mathbf{g}$  вдоль этой линии меняет свое направление на противоположное, тогда как перпендикулярная составляющая остается неизменной. Из рис. 4.3 следует, что угол  $\chi$  между  $\mathbf{g}'$  и  $\mathbf{g}$  связан с величинами  $b$  и  $d$  соотношением

$$b = d \sin \frac{1}{2}(\pi - \chi) = d \cos \frac{\chi}{2} . \quad (4.17)$$

Используя определения (4.13), (4.14) и (4.16), после интегрирования находим

$$\sigma = \frac{d^2}{4}, \quad Q^{(1)} = \pi d^2, \quad Q^{(2)} = \frac{2}{3} \pi d^2 . \quad (4.18)$$

Заметим, что модель твердых сфер оказывается единственной моделью, для которой сечения взаимодействия не зависят от относительной скорости частиц.

В случае произвольного характера взаимодействия между частицами угол рассеяния при их упругом столкновении может быть найден в рамках классического рассмотрения задачи рассеяния частицы приведенной массы  $\mu$ , движущейся с относительной скоростью  $\mathbf{g}$  в центрально-симметричном поле неподвижного силового центра [12,13]. При этом достаточно воспользоваться уравнениями сохранения энергии и момента импульса при столкновениях, записываемыми в системе центра масс сталкивающихся частиц.

Начальная кинетическая энергия в системе центра масс равна  $\mu g^2/2$ , а соответствующий момент импульса  $L = \mu gb$ . С использованием полярных координат  $r$  и  $\vartheta$  в плоскости орбиты движения частиц уравнения сохранения энергии и момента импульса записываются в виде

$$\frac{\mu g^2}{2} = \frac{\mu v_r^2}{2} + U(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + U(r), \quad (4.19)$$

$$\mu gb = \mu r^2 \dot{\vartheta} . \quad (4.20)$$

Здесь  $U(r)$  – потенциальная энергия взаимодействия частиц,  $r$  – расстояние между ними,  $\dot{r}$  – радиальная компонента относительной скорости частиц,  $\dot{\vartheta}$  – угловая скорость поворота вектора  $\mathbf{r}$ .

Заметим, что для краткости величину  $U(r)$  часто называют просто *потенциалом взаимодействия частиц*.

Используя (4.20), представим  $\dot{\Gamma}$  в виде

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{gb}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta}. \quad (4.21)$$

Подставляя в (4.19) выражения для  $\dot{\Gamma}$  (4.21) и  $\dot{\vartheta}$  из (4.20), получаем уравнение траектории

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \pm \frac{r^2}{b} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2} \right]^{1/2}. \quad (4.22)$$

Знак минус относится при этом к входящей ветви траектории, а знак плюс – к выходящей ветви. Так как траектории в системе центра масс симметричны относительно линии наибольшего сближения, угол рассеяния  $\chi$  можно связать с углом  $\theta_0$ , который соответствует изменению полярного угла частицы  $\vartheta$  при ее перемещении из бесконечно удаленной точки в точку наибольшего сближения)  $r_0$  или

$$\chi = |\pi - 2\theta_0|. \quad (4.23)$$

Выражение для угла  $\theta_0$  получается в результате интегрирования уравнения (4.22) по выходящей ветви траектории

$$\theta_0 = b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2} \right]^{-1/2}. \quad (4.24)$$

Величина  $r_0$ , соответствующая точке наибольшего сближения, находится при этом из условия  $dr/d\vartheta = 0$ , что эквивалентно соотношению

$$r_0^2 - b^2 - r_0^2 \frac{2U(r_0)}{\mu g^2} = 0. \quad (4.25)$$

Выражения (4.23)–(4.24) позволяют определить зависимость  $\chi(b, g)$  при заданной функции  $U(r)$ . С помощью полученной зависимости на основе формулы (4.14) находится дифференциальное сечение рассеяния  $\sigma(g, \chi)$ . Заметим, что само выражение (4.13) было получено выше в условиях, когда рассеяние частиц рассматривается в системе координат, связанной не с центром масс частиц, а с одной из взаимодействующих частиц (которая и представляет собой неподвижный силовой центр). Можно показать, однако (см., например, [13]), что угол рассеяния  $\chi$  и сечение  $\sigma(g, \chi)$  определяются и в той и в другой системе координат одинаковыми выражениями.

#### 4.4. Столкновения нейтральных частиц

В обычном газе решающую роль играют упругие столкновения атомов (либо молекул) между собой. Простейшей моделью таких столкновений является обсуждавшаяся выше модель твердых сфер, в которой предполагается, что молекулы подобны бильярдным шарам. Потенциал взаимодействия определяется в этом случае как

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r < d \\ 0, & r > d \end{cases} . \quad (4.26)$$

Схематически этот потенциал изображен на рис. 4.4,а.

Результаты для этой модели легко обобщаются на случай газовой смеси, когда диаметры сфер различны ( $d_1 \neq d_2$ ), для этого достаточно заменить  $d$  в соответствующих формулах на  $d_{12} = (d_1 + d_2)/2$ . Поэтому дифференциальное и эффективные сечения для этого случая принимают вид

$$\sigma_{12} = \frac{d_{12}^2}{4}, \quad Q_{12}^{(1)} = \pi d_{12}^2, \quad Q_{12}^{(2)} = \frac{2}{3} \pi d_{12}^2 . \quad (4.27)$$

В качестве модельного выражения для потенциальной энергии взаимодействия атомов, полезного при практических оценках, нередко используется обратно-степенной закон

$$U_{12}(r) = \left( \frac{\kappa_{12}}{r} \right)^{\nu}, \quad (4.28)$$

где  $\nu$  называется показателем отталкивания (при  $\nu \rightarrow \infty$  эта модель превращается в модель твердой сферы).

В реальности заметные силы отталкивания между взаимодействующими атомами на малых расстояниях между ними сменяются силами притяжения на больших расстояниях (силы Ван-дер Ваальса), поэтому более реалистичными являются модели взаимодействия, учитывающие также притяжение молекул.

На рис 4.4,а – 4.4,д схематически изображены чаще всего применяемые в расчетах модельные потенциалы взаимодействия нейтральных атомов и молекул.

Для модели точечного центра отталкивания (4.28) (рис.4.4,б), используя соотношения (4.23)–(4.25), и определение (4.15), можно получить [1]

$$Q_{12}^{(\ell)}(g) = 2\pi\kappa_{12}^2 \left( \frac{\mu_{12}g^2}{2\nu} \right)^{-2/\nu} \int_0^{\infty} \left[ 1 - \cos^{\ell} \chi(z, \nu) \right] z dz. \quad (4.29)$$

Величина  $\chi(z, \nu)$  определяется при этом из соотношения

$$\chi = \pi - 2 \int_0^{y_0} \left[ 1 - y^2 - \nu^{-1} \left( \frac{y}{z} \right)^{\nu} \right]^{-1/2} dy,$$

а  $y_0$  удовлетворяет уравнению

$$1 - y_0^2 - \nu^{-1} \left( \frac{y_0}{z} \right)^{\nu} = 0.$$

Интеграл в (4.29) для конкретных значений  $\nu$  и  $\ell$  может быть рассчитан численно и выражение для эффективного сечения

$Q_{12}^{(\ell)}(g)$  принимает вид

$$Q_{12}^{(\ell)}(g) = 2\pi\kappa_{12}^2 \left( \frac{\mu_{12}g^2}{2\nu} \right)^{-2/\nu} A_{\ell}(\nu), \quad (4.30)$$

где  $A_{\ell}(\nu)$  – интеграл, величина которого зависит только от  $\nu$  [1].

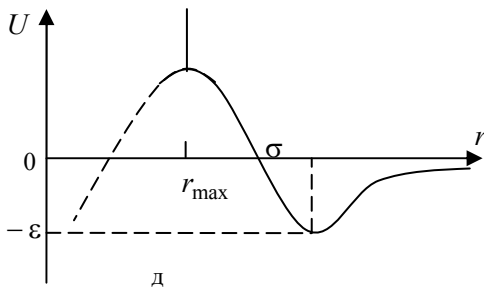
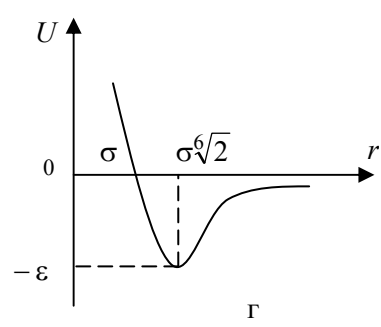
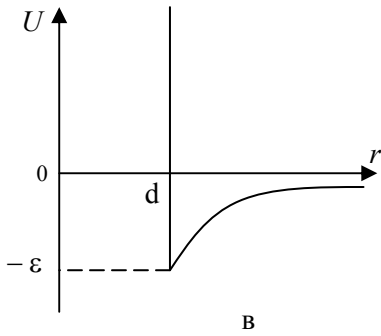
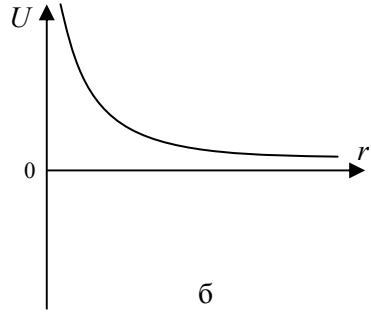
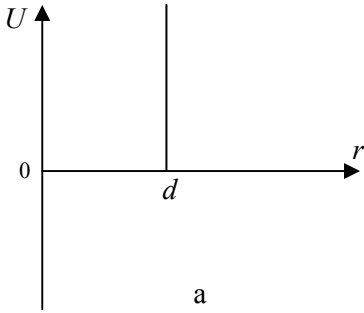


Рис. 4.4

Некоторые значения  $A_\ell(\nu)$  для  $\ell = 1, 2$  приводятся в табл. 4.1.

Таблица 4.1

$\nu$	$A_1(\nu)$	$A_2(\nu)$
4	0,298	0,308
6	0,306	0,283
8	0,321	0,279
10	0,333	0,278
12	0,346	0,279
14	0,356	0,280
20	—	0,286
24	- —	0,289
$\infty$	0,500	0,333

Отметим, что зависимость  $Q_{12}^{(\ell)}$  от  $g$  в рассматриваемом случае имеет вид

$$Q_{12}^{(\ell)}(g) \sim g^{-4/\nu}. \quad (4.31)$$

В частности, при  $\nu = 4$ , что соответствует модели так называемых *максвелловских молекул*, имеем

$$gQ_{12}^{(1)}(g) = \text{const}. \quad (4.32)$$

В дальнейшем мы увидим, что  $gQ_{12}^{(1)}(g)$  входит в подынтегральное выражение величины, определяющей эффективную частоту столкновений частиц, поэтому использование рассматриваемой модели соответствует *постоянной частоте столкновений с передачей импульса*.

Из модельных потенциалов, которые наряду с отталкиванием учитывают также наличие сил притяжения между молекулами следует отметить в первую очередь *потенциал Сэзерленда* (рис. 4.4,в). Выражение для эффективного сечения рассеяния может быть в

этом случае рассчитано до конца. В случае, когда ветвь притяжения описывается функцией  $U(r) = -\kappa/r^6$ , получаем [1]

$$Q_{12}^{(\ell)}(g) = \pi d_{12}^2 \left( 1 + \frac{a(\ell)}{\mu_{12} g^2} \frac{1}{d_{12}^6} \right), \quad (4.33)$$

где  $a(\ell)$  - некоторая постоянная, зависящая от параметра  $\ell$ .

Наиболее часто используемым при расчетах коэффициентов переноса в газах является *потенциал Леннарда-Джонса* [10]

$$U(r) = 4\varepsilon_{12} \left[ \left( \frac{\sigma_{12}}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_{12}}{r} \right)^6 \right], \quad (4.34)$$

где  $\sigma_{12}$  - расстояние, при котором потенциальная функция меняет свой знак, а  $\varepsilon_{12}$  - минимальное значение потенциала. Вид этого потенциала представлен на рис. 4.4,г. Выражения для  $Q_{12}^{(\ell)}(g)$  могут быть получены в этом случае только численно. Заметим, что если  $\sigma$  и  $\varepsilon$  определены экспериментально (например, по температурным зависимостям коэффициентов переноса для чистых газов), то в случае взаимодействия различных пар частиц используются эмпирические комбинационные правила [10]

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \\ \varepsilon_{12} &= (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Иногда для более реального описания области отталкивания, где потенциал Леннарда-Джонса возрастает недостаточно круто, вместо степенной вводится экспоненциальная зависимость  $U(r)$  на малых расстояниях, так что

$$U(r) = b \exp(-r/a) - \frac{c}{r^6}.$$

Однако введение такой модели имеет тот недостаток, что экспонента не обращается в плюс бесконечность при  $r \rightarrow 0$  за счет наличия второго члена, описывающего притяжение. Потенциал  $U$  стремится к минус бесконечности при  $r \rightarrow 0$  (пунктирная часть кривой на рис. 4.4,д). Этот недостаток можно устранить введением

на малых расстояниях твердой сердцевины. Необходимыми свойствами обладает, например, *модифицированная модель потенциала*  $(6 - \exp) \text{ Бакингэма.}$ , схематическое изображение которого представлено на рис.4.4,д сплошной линией. Этот потенциал является трехпараметрическим и имеет вид

$$U(r) = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{6}} \left[ \frac{6}{s} \exp \left\{ s \left( 1 - \frac{r}{\sigma} \right) \right\} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]. \quad (4.36)$$

Параметр  $s$  характеризует крутизну потенциала. Наличие трех параметров позволяет варьировать как ширину, так и глубину потенциальной ямы. Такой потенциал более сложен для вычислений, хотя и дает в ряде случаев лучшее совпадение с экспериментом при исследовании температурной зависимости коэффициентов переноса [11]. Для уменьшения вычислительных трудностей модель сводят к двухпараметрической, задавая фиксированную величину параметра  $s$  (обычно  $s = 12, 14, 16$ ).

#### 4.5. Ион-атомные столкновения

Взаимодействие между ионами и нейтральными атомами (молекулами), особенно в области низких энергий, существенно определяется механизмом поляризации. Пролетающий ион индуцирует в атоме электрический дипольный момент. Если нейтральная молекула газа при этом не обладает собственным постоянным дипольным моментом, то потенциальная энергия взаимодействия индуцированного дипольного момента атома с ионом равна

$$U(r) = - \frac{\alpha_d e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^4}, \quad (4.37)$$

где  $\alpha_d$  – поляризуемость атома. Подставляя  $U(r)$  в (4.22) и используя полученное решение в (4.15), можно получить формальные выражения для эффективных сечений рассеяния  $Q_{12}^{(l)}(g)$ , подобные тем, которые получаются при использовании обратно степенного закона отталкивания (4.28). При этом, однако, надо иметь в виду, что потенциал (4.37) соответствует притяжению частиц, поэтому при заданном значении их относительной скорости существует та-



кое прицельное расстояние  $b = b_c$ , при котором частицы переходят на траекторию постепенного сближения. При  $b < b_c$  сталкивающиеся частицы преодолевают потенциальный барьер, пока не достигнут столь малых расстояний, что доминирующим становится отталкивательное взаимодействие частиц, приводящее к их разлету. Процесс сближения, при котором частицы закручиваются по спирали, называют “захватом частиц”, и для диффузионного сечения захвата может быть получено выражение [13]

$$Q_{12}^{(1)}(g) = 2\pi \left( \frac{\alpha_d e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu_{12} g^2} \right)^{1/2}. \quad (4.38)$$

Заметим, что как и в случае закона отталкивания, при  $\nu = 4$  имеет место условие  $gQ_{12}^{(1)}(g) = \text{const}$ .

Более реалистичная модель взаимодействия иона с атомом должна учитывать наряду с дальнедействующим поляризационным притяжением также и энергию отталкивания на близких расстояниях. Часто применяемая в этом случае модель потенциала имеет вид

$$U_{12}(r) = \frac{n\epsilon_{12}}{n-4} \left[ \frac{4}{n} \left( \frac{r_m}{r} \right)^n - \left( \frac{r_m}{r} \right)^4 \right]. \quad (4.39)$$

Здесь  $\epsilon_{12}$  – глубина минимума потенциальной кривой,  $r_m$  – расстояние между частицами, соответствующее этому минимуму. Значения  $Q_{12}^{(1)}(g)$ , рассчитанные численными методами для случаев  $n = 8$  и  $n = 12$ , приводятся, например, в [13].

На практике потенциалы (4.36) и (4.38) оказываются применимыми при описании упругого рассеяния ионов лишь на атомах других газов. При рассеянии ионов на собственных атомах оказывается существенным эффект *резонансной перезарядки*, который приводит к заметному (почти на порядок) возрастанию сечений. Поскольку в результате перезарядки ион превращается в атом, качественно это эквивалентно рассеянию назад, т.е. на угол  $\chi \approx \pi$ .

Отсюда следует, что диффузионное сечение рассеяния  $Q^{(1)}(g)$  приближенно равно удвоенному полному сечению перезарядки

$$Q^{(1)}(g) \approx 2Q_{res}(g).$$

Последнее может быть определено теоретически на основе полуклассического либо квантового рассмотрения, а также из экспериментов по рассеянию ионных пучков. В достаточно широком интервале энергий зависимость  $Q_{res}(g)$  с хорошей точностью аппроксимируется при этом выражением [6,14]

$$Q_{res}^{1/2}(E) = a_1 - a_2 \ln E, \quad E = \frac{1}{2} \mu g^2, \quad (4.40)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – некоторые постоянные коэффициенты.

#### 4.6. Кулоновские взаимодействия заряженных частиц

Обратимся теперь к взаимодействию заряженных частиц между собой. Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия частиц записывается в виде

$$U_{12} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.41)$$

Вычисления с использованием соотношений (4.23)-(4.25) приводят к следующей связи между углом рассеяния  $\chi$ , прицельным расстоянием  $b$  и начальной относительной скоростью частиц  $g$  [8,14]

$$\operatorname{tg}(\chi/2) = (b/b_0), \quad b_0 = \frac{|e_1 e_2|}{4\pi\epsilon_0 \mu_{12} g^2}. \quad (4.42)$$

Здесь  $b_0$  – значение прицельного параметра, соответствующее для заданной величины  $g$  отклонению частицы на угол, равный  $\pi/2$ . Для дифференциального сечения рассеяния приходим в этом случае к известной формуле Резерфорда

$$\sigma(g, \chi) = \frac{(b_0/2)^2}{\sin^4(\chi/2)} = \left( \frac{e_1 e_2}{8\pi\epsilon_0 \mu_{12} g^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)}. \quad (4.43)$$

Любопытно, что точно такой же результат получается при квантово-механическом рассмотрении кулоновского рассеяния частиц. (Небольшое отличие возникает лишь для одинаковых частиц, когда за счет учета обменного взаимодействия в выражении для сечения

возникает дополнительный осциллирующий член. При малых углах рассеяния, которые вносят основной вклад в сечение рассеяния, роль этого члена оказывается незначительной). Диффузионное сечение столкновений  $Q_{12}^{(1)}(g)$  в рассматриваемом случае записывается как

$$Q_{12}^{(1)}(g) = 2\pi \left( \frac{b_0}{2} \right)^2 \int_0^\pi (1 - \cos \chi) \frac{1}{\sin^4 \left( \frac{\chi}{2} \right)} \sin \chi d\chi . \quad (4.44)$$

Используя разложения в ряд по параметру  $\chi$ , легко убедиться, что при малых значениях  $\chi$  подынтегральное выражение меняется как  $\chi^{-1}$  и, следовательно, на нижнем пределе интеграл расходится. Эта расходимость связана с дальнедействующим характером кулоновского взаимодействия. Для ее формального устранения можно воспользоваться тем обстоятельством, что любая заряженная частица в плазме создает вокруг себя перераспределение пространственного заряда, в результате чего возникает экранирование электрического поля той частицы на расстоянии порядка радиуса Дебая. Этот вопрос уже обсуждался в параграфе 2.6. Последнее означает, что максимальное значение прицельного параметра столкновений  $b$  можно приближенно принять равным радиусу Дебая.

Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия с учетом экранирования описывается выражением

$$U_{12} = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 r} \exp[-(r/r_D)] . \quad (4.45)$$

В частности, для плазмы, образованной из электронов ( $e_e = -1$ ) и ионов ( $e_i = Ze$ ), где  $Z$  – кратность ионизации, при  $T_e = T_i = T$  радиус Дебая определяется как

$$r_D = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{n_e e^2 (1 + Z)} \right)^{1/2} . \quad (4.46)$$

Вычисление дифференциального сечения рассеяния  $\sigma_{12}(g, \chi)$  для экранированного потенциала на основе соотношений (4.13) и (4.24) представляет собой хотя и сложную, но в принципе решаемую за-

дату. При определении эффективных сечений рассеяния фактически тот же результат можно получить, если вместо (4.45) использовать кулоновский потенциал, обрезанный на расстояниях порядка радиуса Дебая, так что

$$\begin{aligned} U_{12}(r) &= \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \leq r_D, \\ U_{12}(r) &= 0, & r > r_D. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Это означает, что для  $b \leq b_{\max} = r_D$  дифференциальное сечение рассеяния дается формулой (4.43), а для столкновений с  $b > r_D$  рассеяние не имеет места. Минимальный угол рассеяния  $\chi_{\min}$ , соответствующий максимальному значению прицельного параметра  $b_{\max} = r_D$ , определяется при этом выражением

$$\operatorname{tg}(\chi_{\min}/2) = (b_0/r_D). \quad (4.48)$$

При использовании потенциала (4.47) вычисление диффузионного сечения столкновений  $Q_{12}^{(1)}(g)$  на основе выражения (4.44), где нижний предел интегрирования полагается равным  $\chi_{\min}$ , приводит к результату

$$Q_{12}^{(1)}(g) = 4\pi b_0^2 \ln \frac{1}{\sin\left(\frac{\chi_{\min}}{2}\right)}$$

или с учетом (4.48)

$$Q_{12}^{(1)}(g) = 2\pi b_0^2 \ln \left[ 1 + \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^2 \right].$$

Использование аналогичной процедуры расчета при вычислении  $Q_{12}^{(2)}(g)$  дает

$$Q_{12}^{(2)}(g) = 4\pi b_0^2 \left\{ \ln \left[ 1 + \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^2 \right] - \frac{\left( \frac{r_D}{b_0} \right)^2}{1 + \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^2} \right\}.$$

Заметим, что рассматриваемое нами приближение справедливо при условии, когда  $\chi_{\min} \ll 1$  или  $b_0/r_D \ll 1$ . В этом случае приближенно имеем

$$Q_{12}^{(1)}(g) \approx 4\pi b_0^2 \ln\left(\frac{r_D}{b_0}\right),$$

$$Q_{12}^{(2)}(g) \approx 2Q_{12}^{(1)}(g) . \quad (4.49)$$

На практике из-за более слабой зависимости от  $g$  под знаком логарифма используется усреднение, так что

$$\bar{Q}_{12}^{(1)}(g) = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda_{12} , \quad (4.50)$$

где  $\ln \Lambda_{12}$  — так называемый кулоновский логарифм. Величина  $\Lambda_{12}$  определена выражением

$$\Lambda_{12} = r_D \left( \frac{\bar{1}}{b_0} \right) = \frac{4\pi\epsilon_0}{|e_1 e_2|} \mu_{12} \langle g^2 \rangle r_D . \quad (4.51)$$

При усреднении по максвелловскому распределению по относительным скоростям частиц имеем  $\langle g^2 \rangle = (3kT/\mu_{12})$  (см. формулу (4.58) следующего параграфа), поэтому окончательно

$$\Lambda_{12} = \frac{12\pi\epsilon_0 kT}{|e_1 e_2|} r_D . \quad (4.52)$$

Приведем простую формулу для расчета  $\Lambda$  для электрон-ионной плазмы при  $Z=1$ , выраженную в единицах СИ,

$$\Lambda = 1,24 \cdot 10^7 \left( \frac{T^3}{n_e} \right)^{1/2} . \quad (4.53)$$

Значения  $\ln \Lambda$  при  $Z=1$  приводятся в табл. 4.2. Для температур, превышающих  $T = 4,2 \cdot 10^5 K$ , табличные значения скорректированы с учетом квантовых поправок [15].

Таблица 4.2

Температура Т, К	Плотность электронов $n_e, \text{м}^{-3}$							
	$10^{12}$	$10^{15}$	$10^{18}$	$10^{19}$	$10^{20}$	$10^{22}$	$10^{24}$	$10^{27}$
$10^2$	9,43	5,97	2,52	1,37	--	--	--	--
$10^3$	12,8	9,43	5,97	4,82	3,67	1,37	--	--
$2 \cdot 10^3$	13,9	10,5	7,01	5,86	4,71	2,40	--	--
$3 \cdot 10^3$	14,5	11,1	7,62	6,47	5,32	3,02	--	--
$10^4$	16,3	12,8	9,43	8,28	7,12	4,82	2,52	--
$10^5$	19,7	16,3	12,8	11,7	10,6	8,28	5,97	2,52
$10^6$	22,8	19,3	15,9	14,8	13,6	11,3	8,96	5,54
$10^7$	25,1	21,6	18,1	17,0	15,9	13,6	11,2	7,85
$10^8$	27,4	24,0	20,5	19,4	18,2	15,9	13,6	10,1

Относительно большие значения кулоновского логарифма, соответствующие условию  $b_0/r_D \ll 1$ , показывают, что основной вклад в эффективное сечение столкновений дают далекие столкновения с большими прицельными параметрами или малыми углами рассеяния ( $\chi \ll \pi/2$ ). Небольшая величина отклонения при каждом да-

леком столкновении позволяет считать их аддитивными, т.е. рассматривать как одновременные малые возмущения. Суммарный эффект таких отклонений оказывается гораздо более важным, чем отдельные близкие столкновения, сопровождающиеся рассеянием на большие углы. Хотя только близкие столкновения являются обычными парными столкновениями, влияние их мало существенно. Вместе с тем, поскольку полный результат рассеяния при далеких столкновениях можно представить в виде суммы отклонений, возникающих при взаимодействии заряженной частицы с каждой из остальных частиц, такой процесс можно приближенно свести как бы к “одному отклонению за некоторый промежуток времени”, т.е. также к своего рода “парному столкновению”. Этим и оправдывается использование концепции парных столкновений частиц в случае их кулоновских взаимодействий.

#### **4.7. Электрон -нейтральные столкновения**

Как уже отмечалось, расчет дифференциальных сечений рассеяния и эффективных сечений для электрон-нейтральных столкновений возможен лишь на основе квантово-механического рассмотрения. Один из видов взаимодействия между электронами и нейтральными атомами (молекулами), проявляющийся на далеких расстояниях, соответствует, как и в случае ион-атомных столкновений, так называемому *поляризационному взаимодействию*. Оно связано с появлением у атомов электрического дипольного момента под влиянием кулоновского поля пролетающей заряженной частицы. Потенциальная энергия взаимодействия индуцированного дипольного момента атома с электроном описывается при этом тем же выражением (4.36), что и в случае ион-нейтрального взаимодействия. Как мы видели, зависимость эффективного сечения с передачей импульса от скорости имеет при этом вид  $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(v) \sim v^{-1}$ , где относительная скорость  $g$  фактически совпадает со скоростью электрона  $v$ . Такая зависимость  $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(v)$  согласуется с экспериментальными значениями упругого сечения рассеяния электронов при больших энергиях для ряда атомов и молекул (H, He, H<sub>2</sub>). Для легких атомов при низких энергиях оказывается существенным эф-

факт обменного взаимодействия между электронами, который может быть рассчитан только методами квантовой механики. Расчеты заметно усложняются, поскольку задача рассеяния электрона на атоме становится существенно многочастичной. Ряд особенностей в поведении сечений возникает при рассеянии электронов на атомах тяжелых инертных газов. Это проявляется в резком падении сечения рассеяния при малых энергиях электронов и наличии глубокого минимума (эффект Рамзауэра) с последующим возрастанием сечения при средних энергиях. Фактически для количественного учета вклада электрон-атомных взаимодействий в коэффициенты переноса часто приходится аппроксимировать теоретически вычисленные или экспериментальные зависимости эффективных сечений от скорости простыми степенными соотношениями. Очевидно, что для разных атомов и молекул, а также для разных областей энергии электронов, подобные аппроксимации могут быть весьма различными. На рис. 4.5,а – 4.5-г представлены взятые из книги [16] усредненные результаты экспериментально определяемых эффективных сечений с передачей импульса для рассеяния электронов на атомах He (рис. 4.5,а) и Ar (рис. 4.5,б), а также на молекулах  $H_2$  (рис 4.5,в) и  $N_2$  (рис 4.5,г)

Значительную часть информации по эффективным сечениям упругих столкновений электронов с атомами и молекулами в большом диапазоне энергий электронов можно найти в [8, 16, 17].

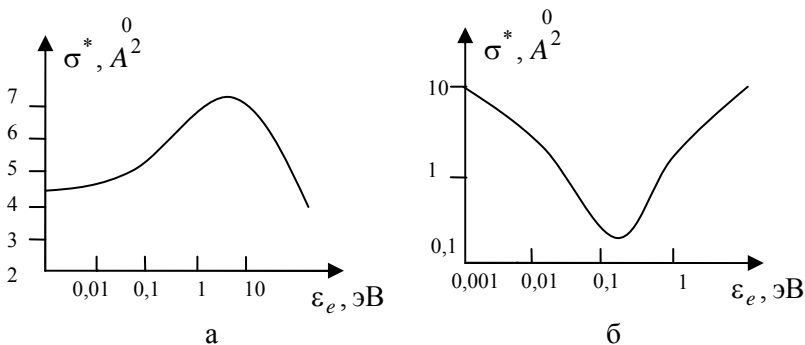


Рис. 5.2. См. также с.129



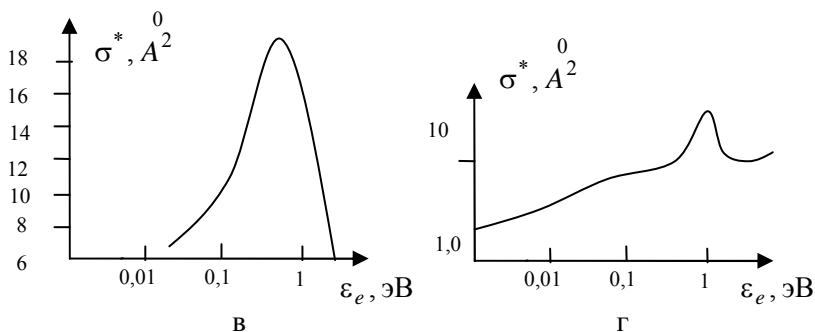


Рис. 5.2

#### 4.8. Среднее число столкновений частиц в газе

Понятия частоты столкновений и средней длины свободного пробега частиц в газе уже обсуждались нами в самом начале главы 1. Ниже мы дадим более строгое определение этих понятий, используя введенные выше эффективные сечения столкновений. С этой целью необходимо сначала вычислить среднее число столкновений двух сортов частиц в единице объема за единицу времени.

Напомним, что число частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega$  в результате столкновений, определяется как  $I_0 \sigma(g, \chi) d\Omega$ , где для однородного пучка частиц, летящих с относительной скоростью  $g$ , плотность потока частиц в пучке равна  $I_0 = ng$ . Рассмотрим столкновения частиц сорта 1 в налетающем пучке с частицами мишени сорта 2. Для того чтобы учесть распределение молекул по скоростям в падающем пучке, выделим долю частиц  $dn_1 = f_1(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1$ , скорости которых находятся в некотором малом интервале скоростей между значениями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1$ . Плотность потока выделенных частиц в пучке равна  $g dn_1$ , а число их столкновений в единицу времени с одной частицей мишени, сопровождающихся рассеянием частиц в телесный угол  $d\Omega$ , равно  $dn_1 g \sigma(g, \chi) d\Omega$ . Далее мы будем интересоваться эффективной частотой столкновений частиц при значениях пара-

метра  $\ell = 1, 2$ , поэтому определение эффективных сечений  $Q_{12}^{(\ell)}(g)$  будет связано с интегрированием по углам рассеяния с весом  $(1 - \cos \chi)$  и  $(1 - \cos^2 \chi)$  соответственно. Вводя распределение по скоростям для частиц мишени  $dn_2 = f_2(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2$ , для числа столкновений частиц сорта 1 и сорта 2 в единице объема за единицу времени в выбранных интервалах их скоростей, получаем

$$dN_{12} = f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) g Q_{12}^{(\ell)}(g) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2.$$

Полное среднее число столкновений частиц в единице объема за единицу времени получается интегрированием этого выражения по скоростям

$$N_{12} = \int f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) g Q_{12}^{(\ell)}(g) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = n_1 n_2 \langle g Q_{12}^{(\ell)}(g) \rangle. \quad (4.54)$$

Обозначение  $\langle F \rangle$  соответствует определению некоторого среднего значения величины  $F(g)$ , так что

$$n_1 n_2 \langle F \rangle = \int f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) F(g) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \quad (4.55)$$

Знак интеграла означает на самом деле интегрирование по трем компонентам скорости частиц каждого сорта, т.е. соответствует шестикратному интегрированию.

Покажем, что в случае, когда  $f_1$  и  $f_2$  имеют вид максвелловских распределений по скоростям, определение этой величины связано фактически с усреднением по максвелловскому распределению относительных скоростей частиц.

Используем переменные  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{g}$  в системе центра масс сталкивающихся частиц. С помощью соотношений (4.5) произведение функций распределения, входящее в подынтегральное выражение (4.54), можно представить как

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) &= n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} \exp\left(-\frac{m_1}{2kT} v_1^2 - \frac{m_2}{2kT} v_2^2\right) = \\ &= n_1 n_2 \left(\frac{m_1 + m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_1 + m_2)}{2kT} G^2\right) \left(\frac{\mu_{12}}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu_{12}}{2kT} g^2\right). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что якобиан преобразования скоростей к переменным, определяемым в системе центра масс на основе формул (4.5), равен единице [1,13], откуда следует

$$d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = d\mathbf{g} d\mathbf{G} .$$

Для сферической системы координат в пространстве скоростей имеем  $d\mathbf{g} = 4\pi g^2 dg$ . Аналогичное выражение может быть записано для элемента скоростей  $d\mathbf{G}$ . Производя соответствующие подстановки в выражение (4.54), получим

$$n_1 n_2 \langle F \rangle = n_1 n_2 \frac{(4\pi)^2 (m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} \times \\ \times \int_0^\infty G^2 \exp\left(-\frac{m_1 + m_2}{2kT} G^2\right) dG \int_0^\infty g^2 \exp\left(-\frac{\mu_{12}}{2kT} g^2\right) F(g) dg . \quad (4.56)$$

Интегрирование по переменной  $\mathbf{G}$  может быть проведено независимо. Используя значение интеграла

$$\int_0^\infty z^2 \exp(-a z^2) dz = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}$$

(см. Приложение 1), получаем окончательно

$$\langle F \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu_{12}}{2kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty g^2 \exp\left(-\frac{\mu_{12}}{2kT} g^2\right) F(g) dg . \quad (4.57)$$

С помощью этой формулы легко определяются значения средней относительной скорости и квадрата относительной скорости частиц

$$\langle g \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi\mu_{12}}\right)^{1/2} , \quad \langle g^2 \rangle = \frac{3kT}{\mu_{12}} . \quad (4.58)$$

Для интересующей нас величины – полного среднего числа столкновений в единице объема за единицу времени имеем

$$N_{12} = n_1 n_2 \langle g Q_{12}^{(\ell)}(g) \rangle = \\ = n_1 n_2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu_{12}}{2kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty g^2 \exp\left(-\frac{\mu_{12}}{2kT} g^2\right) g Q_{12}^{(\ell)}(g) dg .$$

Удобно представить эту величину в виде

$$N_{12} = n_1 n_2 \langle g \rangle \bar{Q}_{12}^{(\ell)}, \quad (4.59)$$

где  $\langle g \rangle$  определено формулой (4.58) и вводится усредненное сечение рассеяния

$$\bar{Q}_{12}^{(\ell)} = 2 \int_0^{\infty} x^3 \exp(-x^2) Q_{12}^{(\ell)} \left( x \sqrt{\frac{2kT}{\mu_{12}}} \right) dx. \quad (4.60)$$

При этом  $x^2 = \mu_{12} g^2 / 2kT$ .

Для модели твердых сфер имеем

$$\bar{Q}_{12}^{(1)} = \pi d_{12}^2, \quad \bar{Q}_{12}^{(2)} = (2/3) \bar{Q}_{12}^{(1)}. \quad (4.61)$$

#### 4.9. Частота столкновений частиц и средняя длина свободного пробега

Введем величину  $v_{12} = N_{12} / n_1$ , которая называется *частотой столкновений* частиц сорта 1 с частицами сорта 2. Она равна, очевидно, среднему числу столкновений, которое испытывает в единицу времени любая выделенная частица данного сорта со всеми частицами другого сорта. По определению

$$v_{12}^{(\ell)} = n_2 \langle g Q_{12}^{(\ell)}(g) \rangle = n_2 \langle g \rangle \bar{Q}_{12}^{(\ell)}. \quad (4.62)$$

Для модели твердых сфер при  $\ell = 1$  получаем

$$v_{12}^{(1)} = n_2 \langle g \rangle \pi d_{12}^2 = n_2 \left( \frac{8kT}{\pi \mu_{12}} \right)^{1/2} \pi d_{12}^2. \quad (4.63)$$

Другой простой случай соответствует модели обратно-степенного взаимодействия при  $\nu = 4$ , поскольку при этом  $gQ^{(1)}(g) = \text{const}$ . В частности, для ион-атомных столкновений в случае поляризационного взаимодействия, используя для эффективного сечения столкновений выражение (4.38), получаем

$$v_{12}^{(1)} = n_2 g Q_{12}^{(1)}(g) = 2\pi n_2 \left( \frac{\alpha_d e^2}{4\pi \epsilon_0 \mu_{12}} \right)^{1/2}. \quad (4.64)$$

Средняя или эффективная частота столкновений в этом случае не зависит от температуры.

Величина, обратная  $v_{12}^{(1)}$ , дает *среднее время между столкновениями* частиц

$$\tau_{12} = \frac{1}{v_{12}^{(1)}} . \quad (4.65)$$

*Средняя длина свободного пробега частиц* определяется как среднее расстояние, проходимое частицей сорта 1 между столкновениями с частицами сорта 2,

$$\lambda_{12} = \langle v_1 \rangle \tau_{12} = \frac{\langle v_1 \rangle}{v_{12}} = \left( \frac{\mu_{12}}{m_1} \right)^{1/2} \frac{1}{n_2 \bar{Q}_{12}} . \quad (4.66)$$

Здесь  $\langle v_1 \rangle = (8kT/\pi m_1)$  – средняя тепловая скорость частиц сорта 1.

Далее под величинами  $v_{12}$  и  $\bar{Q}_{12}$  мы будем подразумевать значения  $v_{12}^{(\ell)}$  и  $\bar{Q}_{12}^{(\ell)}$  при  $\ell = 1$ .

Для частоты столкновений и средней длины свободного пробега частиц одного сорта с массой  $m$ , когда  $\mu_{11} = m/2$ , имеем

$$v_{11} = n_1 \left( \frac{16kT}{\pi m} \right)^{1/2} \bar{Q}_{11} = \sqrt{2} n_1 \langle v \rangle \bar{Q}_{11} ,$$

$$\lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{2} n_1 \bar{Q}_{11}} . \quad (4.67)$$

В случае простого газа (не смеси) при использовании модели молекул–твердых сфер это приводит к уже известному нам выражению (см. формулу (1.3) в главе 1) для средней длины свободного пробега

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} . \quad (4.68)$$

Если в газовой смеси имеются частицы нескольких различных сортов, то полная средняя частота столкновений частицы сорта 1 со всеми остальными частицами определяется как

$$v_1 = v_{11} + \sum_{k \neq 1}^N v_{1k} , \quad (4.69)$$

где  $N$  – число компонентов смеси. То же самое относится и к плазме, в число компонентов которой могут входить электроны и ионы произвольных сортов. Для средней длины свободного пробега частиц сорта 1 в смеси тогда имеем

$$\lambda_1 = \frac{\langle v_1 \rangle}{v_1} = \left( \frac{8kT}{\pi m_1} \right)^{1/2} \frac{1}{v_{11} + \sum_{k \neq 1}^N v_{1k}} \quad (4.70)$$

или

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2} n_1 \bar{Q}_{11} + \sum_{k \neq 1}^N (m_1 / \mu_{1k})^{1/2} n_k \bar{Q}_{1k}} . \quad (4.71)$$

#### ***4.10. Средняя передача импульса при столкновениях частиц разного сорта***

Наряду с полным средним числом столкновений частиц в единице объема и за единицу времени полезно рассчитать в тех же условиях величину среднего изменения импульса при столкновении частиц определенного сорта с частицами других сортов  $\mathbf{R}_\alpha$ . Эта важная для дальнейших приложений величина фигурирует в уравнении баланса импульса отдельного компонента смеси (3.38). Мы увидим, что она оказывается отличной от нуля только в том случае, когда различны направленные макроскопические скорости компонентов. При взаимодействии частиц одного сорта средняя передача импульса отсутствует.

Рассмотрим расчет величины  $\mathbf{R}_1$  для случая взаимодействия частиц 1 с частицами сорта 2 [18]. С учетом выражения (4.9) полное изменение импульса частиц компонента 1 в единице объема за единицу времени можно представить в этом случае как

$$\mathbf{R}_1 = \int m_1(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1) f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) g \sigma_{12}(g, \chi) \sin \chi d\chi d\varphi d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = \\ = \mu_{12} \int \mathbf{g} g Q_{12}^{(1)}(g) f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2, \quad (4.72)$$

где  $Q_{12}^{(1)}(g)$  – эффективное сечение столкновений с передачей импульса или диффузионное сечение рассеяния, определяемое выражением (4.14). При записи (4.72) использовано соотношение (4.9) и усреднение по азимутальному углу  $\varphi$ , которое приводит к результату (4.10).

Если газовая смесь находится в равновесном состоянии, то  $\mathbf{R}_1 = 0$ . Это легко обнаруживается, если поменять местами штрихованные и нештрихованные величины в выражении (4.72) и учесть, что в равновесии максвелловским распределениям частиц по скоростям соответствует выполнение условия  $f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) = f_1(\mathbf{v}'_1) f_2(\mathbf{v}'_2)$ . Кроме того, следует учесть, что из соотношений симметрии между прямыми и обратными столкновениями следует равенство [1]

$$g \sigma(g, \chi) = g' \sigma(g', \chi).$$

Отличное от нуля значение  $\mathbf{R}_1$  получается, если каждый из компонентов смеси обладает своей собственной макроскопической скоростью направленного движения  $\mathbf{u}_\alpha$ . Полезно рассмотреть приближение, когда функции распределения могут быть представлены максвелловскими распределениями по скоростям молекул, сдвинутым относительно собственных скоростей компонентов

$$f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ - \frac{m_\alpha}{2kT} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha)^2 \right]. \quad (4.73)$$

Используем определение диффузионной скорости компонента смеси  $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}$ . Далее будет рассматриваться приближение, когда диффузионные скорости компонентов смеси предполагаются малыми по сравнению с тепловыми скоростями частиц

$$|\mathbf{w}_\alpha| \ll \left( \frac{kT}{m_\alpha} \right)^{1/2} .$$

Разлагая функцию распределения (4.73) в ряд по малому параметру и пренебрегая квадратичными по диффузионной скорости членами, получаем

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)}(1 + 2\gamma_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha) . \quad (4.74)$$

Здесь

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha \left( \frac{\gamma_\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-\gamma_\alpha c_\alpha^2) - \quad (4.75)$$

локально-равновесная максвелловская функция по скоростям, определяемая в системе отсчета, движущейся со средне-массовой скоростью смеси. При этом  $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$  и  $\gamma_\alpha = m_\alpha/2kT$ .

Обратимся теперь к исходному выражению (4.72). Заметим предварительно, что скорости  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$  могут быть выражены через переменные в системе центра масс сталкивающихся частиц с помощью соотношений

$$m_1 \mathbf{c}_1 = m_1 \mathbf{U} - \mu_{12} \mathbf{g} , \quad m_2 \mathbf{c}_2 = m_2 \mathbf{U} + \mu_{12} \mathbf{g} ,$$

где  $\mathbf{U} = \mathbf{G} - \mathbf{u}$ . Преобразуя произведение максвелловских функций распределения по аналогии с результатом (4.56), получаем

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= n_1 n_2 \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\pi^2} \right)^{3/2} \exp(-\gamma_1 c_1^2 - \gamma_2 c_2^2) \times \\ &\quad \times (1 + 2\gamma_1 \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + 2\gamma_2 \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{c}_2) = \\ &= n_1 n_2 \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{\gamma_{12}}{\pi} \right)^{3/2} \exp[-(\gamma_1 + \gamma_2) \mathbf{U}^2] \exp(-\gamma_{12} \mathbf{g}^2) \times \\ &\quad \times [1 + 2(\gamma_1 \mathbf{w}_1 + \gamma_2 \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{U} - \gamma_{12} (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{g}] , \end{aligned} \quad (4.76)$$



где  $\gamma_{12} = \mu_{12}/2kT$ . Подставляя (4.76) в (4.72) и используя соотношения  $d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 = d\mathbf{U} dg$ , можно произвести интегрирование соответствующих выражений по переменной  $\mathbf{U}$ . При этом часть интегралов обращается в нуль из-за нечетности подинтегральных выражений по  $\mathbf{U}$ . Окончательное выражение для  $\mathbf{R}_1$  принимает вид (см. Приложение 3)

$$\mathbf{R}_1 = -n_1 \mu_{12} \bar{v}_{12} (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) = -n_1 \mu_{12} \bar{v}_{12} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2). \quad (4.77)$$

Средняя или эффективная частота столкновений частиц с передачей импульса  $\bar{v}_{12}$ , фигурирующая в (4.77), определяется выражением

$$\bar{v}_{12} = \frac{4}{3} n_2 \langle g \rangle \langle Q_{12}^{(1)} \rangle. \quad (4.78)$$

Здесь

$$\langle Q_{12}^{(1)} \rangle = \int_0^{\infty} x^5 \exp(-x^2) Q_{12}^{(1)} \left( x \sqrt{\frac{2kT}{\mu_{12}}} \right) dx. \quad (4.79)$$

Для модели твердых сфер  $\langle Q_{12}^{(1)} \rangle = \bar{Q}_{12}^{(1)} = \pi d_{12}^2$ . Средняя частота столкновений с передачей импульса  $\bar{v}_{12}$  отличается в этом случае от введенной ранее частоты столкновений  $v_{12}^{(1)}$  множителем (4/3).

Полученное нами выражение для средней передачи импульса при столкновении частиц различного сорта допускает простое обобщение на случай многокомпонентной газовой смеси. Полная средняя передача импульса в единице объема за единицу времени от частиц компонента  $\alpha$  складывается в этом случае из величин, соответствующих передаче импульса при столкновениях частиц данного сорта с частицами всех остальных компонентов. В результате

$$\mathbf{R}_\alpha = - \sum_{\beta \neq \alpha} n_\alpha \mu_{\alpha\beta} \bar{v}_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) \quad (4.80)$$

#### 4.11. $\Omega$ - интегралы кинетической теории

В кинетической теории явлений переноса в газах и газовых смесях, использующей приближенные методы решения кинетического уравнения Больцмана, важное значение имеют так называемые  $\Omega$ -интегралы, через линейные комбинации которых выражаются коэффициенты переноса. Общее определение этих интегралов имеет вид [1,10]

$$\Omega_{12}^{(\ell,r)} = \left( \frac{kT}{2\pi\mu_{12}} \right)^{1/2} \int_0^\infty x^{2r+3} \exp(-x^2) Q_{12}^{(\ell)}(g) dx, \quad (4.81)$$

где

$$Q_{12}^{(\ell)}(g) = 2\pi \int_0^\pi \sigma_{12}(g, \chi) (1 - \cos^\ell \chi) \sin \chi d\chi. \quad (4.82)$$

Переменные  $x$  и  $g$  связаны при этом как  $x = (\mu_{12}/2kT)^{1/2} g$ .

В случае простого газа в (4.81) надо положить  $\mu_{12} = m/2$ . При этом  $x = (m/4kT)^{1/2} g$ .

Введенные в предыдущих параграфах выражения для частот столкновений связаны с  $\Omega$ -интегралами соотношениями

$$\nu_{11} = 8n_1 \Omega_{11}^{(0,1)}, \quad \nu_{12} = 8n_2 \Omega_{12}^{(0,1)}, \quad (4.83)$$

$$\bar{\nu}_{12} = \frac{16}{3} n_2 \Omega_{12}^{(1,1)}. \quad (4.84)$$

Как мы увидим ниже, параметры  $\Omega^{(0,1)}$  фигурируют в выражениях для коэффициентов переноса, получаемых на основе элементарной кинетической теории, использующей концепцию *средней длины свободного пробега частиц*. С помощью интеграла  $\Omega_{12}^{(1,1)}$  непосредственно записывается коэффициент взаимной диффузии молекул в смеси  $D_{12}$ , выражение для которого получается на основе *метода баланса импульса* (см. главу 6). Соответствующий резуль-

тат практически совпадает с выражением, получаемым в первом приближении строгой кинетической теории газовых смесей [1]. В той же строгой теории коэффициенты вязкости и теплопроводности простого газа выражаются через интегралы вида

$$\Omega^{(2,2)} = \left( \frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \int_0^\infty x^7 \exp(-x^2) Q^{(2)}(g) dx \quad . \quad (4.85)$$

Для модели молекул– твердых упругих сфер диаметра  $d$  введенные выше  $\Omega$ - интегралы принимают вид

$$\begin{aligned} [\Omega^{(0,1)}]_{мв.сф.} &= \frac{1}{2} \left( \frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \pi d^2 \quad , \\ [\Omega^{(1,1)}]_{мв.сф.} &= 2 [\Omega^{(0,1)}]_{мв.сф.} \quad , \\ [\Omega^{(2,2)}]_{мв.сф.} &= 4 [\Omega^{(0,1)}]_{мв.сф.} \quad . \end{aligned} \quad (4.86)$$

Для той же модели в случае бинарной газовой смеси

$$[\Omega_{12}^{(1,1)}]_{мв.сф.} = 2 [\Omega_{12}^{(0,1)}]_{мв.сф.} = \left( \frac{k T}{2\pi\mu_{12}} \right)^{1/2} \pi d_{12}^2 \quad , \quad (4.87)$$

где  $d_{12} = (d_1 + d_2)/2$

Как видно, все  $\Omega$ - интегралы имеют порядок величины, равной произведению средней тепловой скорости частиц на эффективное сечение их столкновений.

При записи выражений для коэффициентов переноса, получаемых в строгой теории, часто принято использовать приведенные величины [10,11]

$$\Omega^{(\ell,r)*} = \frac{\Omega^{(\ell,r)}}{[\Omega^{(\ell,r)}]_{тв.сф}} \quad , \quad (4.88)$$

которые характеризуют отличие принятой модели взаимодействия молекул от идеализированной модели твердых сфер. Тогда, например,

$$\Omega^{(1,1)} = \left( \frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \pi \sigma^2 \Omega^{(1,1)*}, \quad \Omega^{(2,2)} = 2 \left( \frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \pi \sigma^2 \Omega^{(2,2)*},$$

$$\Omega_{12}^{(1,1)} = \left( \frac{kT}{2\pi\mu_{12}} \right)^{1/2} \pi \sigma_{12}^2 \Omega_{12}^{(1,2)*}. \quad (4.89)$$

Для модели твердых сфер  $\sigma = d$ . Для произвольного потенциала взаимодействия, например для потенциала Леннард-Джонса, параметр  $\sigma$  соответствует характерному расстоянию, на котором потенциальная энергия меняет знак (см. рис. 4.4,г и выражение (4.34)). В случае смеси  $d_{12} = (d_1 + d_2)/2$  и  $\sigma_{12} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ .

## **ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА. ВЯЗКОСТЬ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И САМОДИФФУЗИЯ В ГАЗЕ**

Приближенные выражения для коэффициентов переноса в газах могут быть получены на основе элементарной кинетической теории, развитой еще в середине XIX в. в работах Клаузиуса и Максвелла и основанной на концепции средней длины свободного пробега молекул. Недостатком элементарной теории оказывается то, что она дает в ряде случаев заметную погрешность в значениях численных множителей при коэффициентах переноса по сравнению с результатами строгой теории. Важными ее достоинствами являются простота и ясный физический смысл самой процедуры вывода соответствующих выражений. Использование элементарной теории приводит в основном к правильным качественным зависимостям коэффициентов переноса от основных параметров газа и эффективных сечений рассеяния частиц. Что касается самих численных множителей в соответствующих выражениях и реальной зависимости коэффициентов переноса от температуры, то их можно скорректировать, опираясь на известные результаты строгой кинетической теории явлений переноса в газах.

Как мы увидим ниже, в случае вязкости и теплопроводности элементарная теория допускает простое обобщение на случай газовой смеси. К сожалению, такой подход оказывается малоприменимым при анализе диффузии в газовой смеси, когда массы и эффективные сечения рассеяния молекул ее компонентов существенно различаются. Это еще в большей степени относится к ионизованному газу, где важную роль в явлениях переноса играют частицы малой массы – электроны, диффузия которых под действием электрического поля вносит основной вклад в электропроводность плазмы. По этой причине при рассмотрении диффузионных явлений в газовой смеси и электропроводности плазмы мы будем использовать другой подход, основанный на уравнении баланса импульса для отдельного компонента смеси. Анализ полученных при этом результатов будут посвящены следующие главы.

### 5.1. Метод средней длины свободного пробега

Элементарная кинетическая теория явлений переноса в газе основана на ряде простых предположений. Выделим в газе произвольную плоскость АВ, разделяющую его на две области слева и справа от этой плоскости (рис. 5.1). Пусть в направлении оси  $X$ , перпендикулярном этой плоскости, изменяется некоторая величина  $G$ , которая характеризует произвольное молекулярное свойство, отнесенное к одной молекуле. Этим свойством может быть импульс, энергия, концентрация частиц, электрический заряд частицы и т.д.

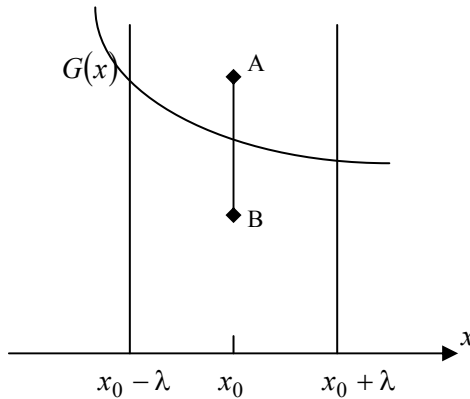


Рис 5.1

Будем предполагать, что полный перенос частиц в газе через поверхность АВ отсутствует. Это означает, что слева и справа любой выделенный элемент поверхности пересекает одинаковое число молекул. Число частиц, падающих на единичную поверхность в газе с одной из сторон, вычислялось ранее (см. главу 1) и равно

$$v = \frac{1}{4} n \langle v \rangle, \quad (5.1)$$

где  $\langle v \rangle = (8kT/\pi m)^{1/2}$  – средняя тепловая скорость молекул.

Следующее предположение состоит в том, что при пересечении плоскости АВ, положение которой определено координатой  $x = x_0$ , каждая молекула переносит значение величины  $G(x)$ , соответствующее тому положению молекулы, где она в последний раз испытала столкновение с другими молекулами. Хотя отдельные частицы претерпевают последние столкновения на различных расстояниях от плоскости АВ, можно приближенно считать, что это расстояние равно средней длине свободного пробега молекул  $\lambda$ . Величина  $\lambda$  обычно мала по сравнению с характерной длиной, на которой происходит заметное изменение величины  $G$ , поэтому на расстояниях  $\lambda$  справа и слева от плоскости можно представить  $G$  в виде

$$G(x_0 \pm \lambda) = G(x_0) \pm \lambda \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Мы ограничиваемся при этом первым членом разложения в ряд Тейлора около точки  $x = x_0$ .

Плотность потока величины  $G$  в направлении положительных значений оси  $X$  дается выражением

$$\Gamma^+ = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \left[ G(x_0) - \lambda \frac{\partial G}{\partial x} \right],$$

а в направлении отрицательных значений – выражением

$$\Gamma^- = -\frac{1}{4} n \langle v \rangle \left[ G(x_0) + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} \right].$$

Суммарная плотность потока в положительном направлении оси  $X$  определяется тогда как

$$\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^- = -\frac{1}{2} n \langle v \rangle \lambda \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (5.2)$$

Полученное соотношение можно рассматривать как общее уравнение переноса величины  $G$ .

## 5.2. Вязкость простого газа

Обратимся к вычислению коэффициента вязкости простого газа на основе элементарной теории. Как следует из анализа, проведенного в главе 3, вязкость или внутреннее трение в газе обусловлены

переносом импульса упорядоченного движения молекул в направлении, поперечном по отношению к общему потоку газа. Пусть скорость газа, текущего в направлении оси  $Y$ , меняется по закону  $u_y(x)$  (см. рис. 3.3). Предполагается, что каждая частица, пролетающая через единичную площадку, расположенную на плоскости АВ, несет с собой импульс  $mu_y$ , определяемый значением скорости в том слое газа, где произошло последнее столкновение этой частицы. Это означает, что в выражении (5.1) можно положить  $G = mu_y(x)$ . Для плотности потока импульса в газе тогда имеем

$$\pi_{yx} = -\frac{1}{2} \rho \lambda \langle v \rangle \frac{du_y}{dx} . \quad (5.3)$$

Сравнивая (5.3) с соотношением (3.22), получаем выражение для коэффициента вязкости газа

$$\eta = \frac{1}{2} \rho \lambda \langle v \rangle , \quad (5.4)$$

где

$$\rho = mn , \quad \langle v \rangle = \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} .$$

Отметим, что в системе СИ размерность коэффициента вязкости

$$[\eta] \text{-(кг/м с) или (Па с) .}$$

В соответствии с результатами предыдущей главы

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{v_{11}} = \frac{\langle v \rangle}{8 n \Omega^{(0,1)}} . \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в (5.4), с учетом соотношения (4.67) находим

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{kT}{\Omega^{(0,1)}} = \left( \frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\overline{Q}_{11}(T)} . \quad (5.6)$$



Это выражение позволяет приближенно оценивать значения коэффициента вязкости газа для произвольных потенциалов взаимодействия молекул. Напомним, что для модели твердых сфер  $\bar{Q}_{11} = \pi d^2$ , и в этом случае

$$\eta = \left( \frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2} = 0,179 \frac{\sqrt{mkT}}{d^2}. \quad (5.7)$$

Поскольку  $\eta \sim \sqrt{m}$ , при прочих равных условиях коэффициент вязкости оказывается тем *большим*, чем *больше* масса молекул газа.

Важным выводом, следующим из (5.6) и (5.7), оказывается то, что коэффициент вязкости не зависит от плотности (давления) газа. Этот результат оказался в свое время неожиданным для основоположников кинетической теории газов. Известно, что Максвелл подвергнул его специальной экспериментальной проверке, наблюдая скорость затухания колебаний маятника, подвешенного в газе различной плотности. С тех пор факт независимости вязкости от давления, подтвержденный многими экспериментами, рассматривается как убедительное доказательство справедливости кинетической теории. Причина такого поведения коэффициента вязкости понятна. С понижением давления уменьшается величина плотности  $n$ , т.е. число молекул, участвующих в переносе импульса через выделенную поверхность в газе. С другой стороны, при этом обратно пропорционально плотности растет средняя длина свободного пробега  $\lambda$ , т.е. увеличивается результирующий перенос импульса частиц через поверхность. Очевидно, что независимость коэффициента вязкости от давления (или плотности) газа может иметь место лишь до тех пор, пока средняя длина свободного пробега мала по сравнению с характерным размером задачи. В случае течения газа между параллельными плоскостями, например, таким характерным размером является расстояние между пластинами  $h$ . Когда  $\lambda$  и  $h$  становятся сравнимыми, эффективный коэффициент вязкости начинает убывать с понижением плотности. Нарушение закона Максвелла происходит и в случае плотных газов, что связано с отклонением газа от идеальности. В этом случае коэффициент вязкости

может увеличиваться с ростом плотности, что особенно заметно проявляется при низких температурах.

Что касается температурной зависимости вязкости, то зависимость  $\eta \sim T^{1/2}$ , следующая из теории для модели твердых сфер, как правило, плохо согласуется с экспериментальными данными. Более достоверную температурную зависимость дает, например, использование при вычислении  $\bar{Q}_{11}(T)$  или  $\Omega^{(0,1)}$  потенциала Сэзерленда, учитывающего наличие сил притяжения молекул. Используем для этого случая результат вычисления эффективного сечения столкновений  $Q_{12}^{(1)}(g)$ , который дается формулой (4.33) и для простого газа записывается в виде

$$Q^{(1)}(g) = \pi d^2 \left( 1 + \frac{2a(1)}{d^6} \frac{1}{mg^2} \right).$$

Подстановка этого выражения в формулу (4.60) дает

$$\bar{Q}_{11}^{(1)} = 2\pi d^2 \int_0^\infty x^3 \exp(-x^2) \left( 1 + \frac{C}{T} \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi d^2 \left( 1 + \frac{C}{T} \right),$$

где  $C = a(1)/2kd^2$ . Полученный результат означает, что наличие поля притяжения приводит к увеличению кажущегося диаметра молекулы, которое оказывается существенным при низких температурах. При этом усредненное сечение рассеяния убывает с возрастанием температуры. Для коэффициента вязкости в этом случае приходим к известной формуле Сэзерленда

$$\eta = \left( \frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2} \frac{1}{1 + \frac{C}{T}}. \quad (5.8)$$

Если из эксперимента известно какое-либо одно значение коэффициента вязкости  $\eta_0$  при температуре  $T_0$ , то полуэмпирическое

соотношение для определения  $\eta$  при произвольной температуре  $T$  записывается как

$$\eta(T) = \eta_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + C}{T + C}. \quad (5.9)$$

Для целого ряда газов формула (5.9) хорошо передает температурную зависимость коэффициента вязкости в определенном интервале температур. При этом значения констант  $C$  могут несколько отличаться для различных интервалов температур и существенно отличаться для разных газов. Так для молекулярного азота  $C = 105$  в интервале температур  $T = 293 - 1100$  К, а для двуокиси углерода  $C = 254$  при  $T = 300 - 550$  К и  $C = 213$  при  $T = 550 - 1100$  К. Значения констант  $C$  и соответствующие им интервалы температур для многих других газов можно найти, например, в [19].

### 5.3. Теплопроводность простого газа

Рассмотрим теперь вопрос о теплопроводности газа. Как уже отмечалось в главе 3, необратимый перенос энергии в газе возникает, если среднее значение тепловой энергии молекул или температура газа в разных местах оказывается различной. Предположим, что плоскость АВ на рис. 5.1 разделяет области с более высокой и более низкой температурой. В результате хаотического движения частиц из более нагретой области в менее нагретую будут переноситься частицы, обладающие в среднем более высокой энергией, чем частицы, переносимые в обратном направлении. В качестве величины  $G$  в уравнении переноса (5.2) должна фигурировать при этом средняя тепловая энергия, приходящаяся на одну молекулу  $\langle E \rangle = kT \left( \frac{3}{2} + \langle \varepsilon(T) \rangle \right)$ . Производная  $\partial G / \partial x$  для одномерного переноса энергии в газе может быть тогда представлена в виде

$$\frac{dG}{dx} = \frac{C_V}{N_A} \frac{dT}{dx},$$

где  $C_V$  – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Плотность потока энергии (или тепловой поток) определяется соотношением

$$q_x = -\frac{1}{2}\rho c_V \lambda \langle v \rangle \frac{dT}{dx} . \quad (5.10)$$

Выражение для коэффициента теплопроводности принимает в этом случае вид

$$\kappa = \frac{1}{2}\rho c_V \lambda \langle v \rangle . \quad (5.11)$$

Здесь  $c_V = C_V/M$  – удельная теплоемкость газа,  $M = mN_A$  – молярная масса. Коэффициент теплопроводности в системе СИ имеет размерность

$$[\kappa] - (\text{дж/м с К}) .$$

Для газа одноатомных молекул и модели твердых сфер получаем

$$\kappa = \frac{3}{2} \left( \frac{k^3 T}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2} = 0,269 \left( \frac{k^3 T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{d^2} . \quad (5.12)$$

В отличие от вязкости имеем  $\kappa \sim 1/\sqrt{m}$ , т.е. при прочих равных условиях коэффициент теплопроводности оказывается тем *большим*, чем *меньше* масса молекул газа.

Сравнение (5.11) и (5.4) показывает, что коэффициенты теплопроводности и вязкости связаны в общем случае простым соотношением

$$\kappa = c_V \eta . \quad (5.13)$$

Это означает, что в той области температур, где теплоемкость газа постоянна, для зависимости коэффициента теплопроводности от давления и температуры газа справедливы те же выводы, которые были сделаны выше в случае вязкости. В частности, теплопроводность газа, так же как и вязкость, не зависит от давления, что под-

тверждено многочисленными экспериментами. Температурная зависимость теплопроводности газа для многих случаев хорошо воспроизводится полуэмпирическим соотношением, подобным формуле Сэзерленда для вязкости (5.9).

Подчеркнем, что связь между  $\kappa$  и  $\eta$  в форме (5.13) получена в рамках элементарной теории явлений переноса в газах. О более точных соотношениях между этими коэффициентами для одноатомных и многоатомных газов см. в параграфах 5.5 и 5.6.

#### 5.4. Самодиффузия

Элементарная теория, в принципе, позволяет рассмотреть и процесс диффузии в газах. В общем случае это приводит к необходимости несколько модифицировать исходное уравнение (5.2), принимая во внимание, что частицы различных сортов газовой смеси имеют различные средние длины свободного пробега. К сожалению, такой подход оказывается менее продуктивным, чем в случае вязкости и теплопроводности. В частности, в итоге соответствующих вычислений оказывается, что коэффициент взаимной диффузии бинарной смеси  $D_{12}$  заметным образом зависит от относительной концентрации компонентов, что не подтверждается на опыте. Приемлемый результат получается при рассмотрении лишь так называемой *самодиффузии* в газе. При этом речь идет о диффузии какой-то части выделенных или «меченых» молекул в собственном газе, например, диффузии радиоактивного изотопа в смеси частиц с мало отличающимися массами и сечениями рассеяния. В этом случае можно по-прежнему использовать уравнение (5.2), приписывая молекулам компонентов одинаковую среднюю скорость движения  $\langle v \rangle$  и одну и ту же среднюю длину свободного пробега  $\lambda$ . Мы приведем здесь соответствующий результат для коэффициента самодиффузии, хотя более надежный общий метод анализа диффузии в смеси будет рассмотрен в следующей главе.

Как и при анализе предыдущих свойств переноса, полный поток газа через любую поверхность в газовой смеси отсутствует, что соответствует условию  $n = \text{const}$ . Однако, если вдоль оси  $X$  меняется относительная концентрация  $c_1 = n_1/n$  какого-то выделенного

компонента, то возникает диффузия этих «меченых» молекул, стремящаяся выравнять их концентрацию в объеме. Плотность диффузионного потока компонента 1 определяется соотношением (5.2), в котором надо положить  $G = c_1$ . В результате

$$j_x = -nD_{11} \frac{dc_1}{dx}, \quad (5.14)$$

где коэффициент самодиффузии  $D_{11}$  равен

$$D_{11} = \frac{1}{2} \lambda \langle v \rangle. \quad (5.15)$$

Размерность коэффициента самодиффузии в системе СИ –

$$[D_{11}] - (\text{м}^2/\text{с}).$$

Для модели твердых сфер

$$D_{11} = \frac{1}{n} \left( \frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2} = 0,179 \frac{(kT)^{3/2}}{p \sqrt{m}} \frac{1}{d^2}. \quad (5.16)$$

Как и в случае теплопроводности  $D_{11} \sim 1/\sqrt{m}$ , т.е. коэффициент диффузии тем *больше*, чем *меньше* масса молекул газа. Существенно, что коэффициент диффузии обратно пропорционален давлению  $p$  и для рассматриваемой модели при  $p = \text{const}$  меняется пропорционально  $T^{3/2}$ .

Заметим, что коэффициенты самодиффузии и вязкости в элементарной теории связаны простым соотношением

$$\frac{\rho D_{11}}{\eta} = 1. \quad (5.17)$$

Подводя итог результатам элементарной теории явлений переноса в простом газе, еще раз подчеркнем, что соотношения между коэффициентами переноса (5.15) и (5.17), как и числовые множители в самих выражениях для коэффициентов переноса, получаемых с помощью элементарной теории, могут содержать значительные погрешности. Так, в ряде книг и учебников по молекулярной физи-

ке [20–22], в главах, где рассматриваются явления переноса в газе, вместо множителя  $(1/2)$  в исходном уравнении переноса (5.2) часто фигурирует множитель  $(1/3)$ . Это связано с тем, что вместо более точной формулы для потока частиц через единичную поверхность (5.1) используется приближенная формула с коэффициентом  $(1/6)$  вместо  $(1/4)$ . В других случаях (см., например, [22]) среднее расстояние, проходимое частицей после последнего столкновения, полагается равным  $(2/3)\lambda$  вместо  $\lambda$ . Учитывая приближенный характер элементарной теории, такому различию в множителях не следует придавать большого значения. В дальнейшем мы будем там, где это возможно, корректировать значения числовых множителей с учетом известных результатов строгой кинетической теории явлений переноса в газах.

### ***5.5. Сравнение с результатами строгой кинетической теории явлений переноса***

Полезно сравнить приведенные выше выражения для коэффициентов переноса с известными результатами строгой кинетической теории явлений переноса в газах [1,10,11]. Получение этих результатов основывается, как правило, на приближенных методах решения кинетического уравнения Больцмана, описывающего эволюцию функции распределения частиц газа во времени и в пространстве. Строгая кинетическая теория явлений переноса в разреженных газах и газовых смесях достаточно сложна и не является предметом изложения настоящей книги. Мы отметим здесь лишь некоторые общие особенности одного из часто применяемых способов расчета – метода Чепмена -Энскога [1].

Важной чертой любого из приближенных методов решения кинетического уравнения является то, что для слабо неоднородных газов функцию распределения частиц по скоростям можно представить в виде

$$f = f_0(1 + \phi) , \quad (5.18)$$

где  $f_0$  соответствует локально-равновесному распределению Максвелла (1.82), а  $\phi$  – малая добавка, имеющая, как можно показать, порядок величины, равный отношению средней длины свободного

пробега в характерном размере задачи (т.е. порядок числа Кнудсена  $Kn = \lambda/L$ ). Исходя из общих определений тензора давлений  $\hat{\mathbf{P}}$  (3.4) и теплового потока  $\mathbf{q}$  (3.11), легко обнаружить, что в нулевом приближении, когда  $f = f_0$ , мы имеем

$$P_{rs} = p\delta_{rs}, \quad \mathbf{q} = 0.$$

Отличные от нуля значения тензора вязких напряжений  $\pi_{rs}$  и теплового потока  $\mathbf{q}$  получаются, если принять во внимание вклад неравновесной поправки к функции распределения  $\phi$ . В этом случае

$$\pi_{rs} = m \int \left( c_r c_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} c^2 \right) f_0 \phi \, d\mathbf{v}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{q} = \int \frac{m c^2}{2} \mathbf{c} f_0 \phi \, d\mathbf{v}. \quad (5.20)$$

В традиционном методе Чепмена-Энскога [1], который можно рассматривать как метод последовательных приближений по малому параметру  $Kn$ , поправка  $\phi$  ищется из решения линеаризованного кинетического уравнения Больцмана, левая часть которого преобразуется с помощью уравнений сохранения в форме Эйлера (т.е. без учета в уравнениях диссипативных членов). С учетом сложного вида находящегося в правой части интеграла столкновений Больцмана уравнение для нахождения интересующей нас поправки  $\phi$  принимает форму интегрального неоднородного уравнения. Структура левой части уравнения показывает, что поправку  $\phi$  следует искать в виде линейной функции градиента температуры  $\nabla T$  и тензора скоростей сдвига  $\hat{\mathbf{S}}$

$$\phi = -a(c) \mathbf{c} \cdot \nabla \ln T - b(c) \left( c_r c_s - \frac{1}{3} \delta_{rs} c^2 \right) S_{rs}. \quad (5.21)$$

Коэффициенты пропорциональности в соотношении (5.21) находятся с помощью метода, в котором они разлагаются в ряды по полиномам Сонина [1,12]. С учетом определений (5.19) – (5.20) это



позволяет сразу записать обычные линейные соотношения переноса

$$\pi_{rs} = -2\eta S_{rs}, \quad \mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (5.22)$$

где коэффициенты вязкости и теплопроводности, благодаря выполнению соотношений ортогональности для полиномов, определяются значениями первых коэффициентов при полиномах в соответствующих разложениях. Сами коэффициенты находятся при этом из систем алгебраических уравнений, число которых определяет порядок приближения при расчете соответствующих коэффициентов переноса. Аналогичные результаты получаются и в случае газовой смеси. Для диффузионного потока в случае самодиффузии, в частности, имеем

$$\mathbf{j} = -nD_{11} \nabla x_1. \quad (5.23)$$

Подробности вычисления коэффициентов переноса на основе метода Чепмена-Энскога или метода моментов Грэда можно найти в ряде известных монографий [1,10,11,18,23,24].

Ниже приводятся результаты расчета коэффициентов переноса [1,] при учете в каждом конкретном случае лишь одного полинома Сонина в разложении соответствующих коэффициентов  $a(c)$  и  $b(c)$  в выражении для  $\phi$  (5.21)

$$[\eta]_1 = \frac{5}{8} \frac{kT}{\Omega^{(2,2)}}, \quad (5.24)$$

$$[\kappa]_1 = \frac{5}{2} c_V [\eta]_1, \quad (5.25)$$

$$[D_{11}]_1 = \frac{3}{8} \frac{kT}{m} \frac{1}{n\Omega^{(1,1)}}. \quad (5.26)$$

Индекс 1 при квадратных скобках означает, что соответствующие коэффициенты переноса определены в так называемом *первом приближении Чепмена-Каулинга* [1], что и соответствует учету *одного полинома* в разложении.

Для модели твердых сфер, используя соотношения (4.86), получаем

$$[\eta]_I = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{\pi mkT}}{\pi d^2} = 0,176 \frac{\sqrt{mkT}}{d^2}, \quad (5.24')$$

$$[\kappa]_I = \frac{75}{64} \left( \frac{\pi k^3 T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2} = 0,661 \left( \frac{k^3 T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{d^2}, \quad (5.25')$$

$$[D_{11}] = \frac{3}{8n} \left( \frac{\pi kT}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2} = 0,212 \frac{(kT)^{3/2}}{p\sqrt{m}} \frac{1}{d^2}. \quad (5.26')$$

Заметим, что учет следующих полиномов в разложениях приводит лишь к мало существенным поправкам в коэффициентах переноса, не превышающим для модели твердых сфер 1,5% в случае вязкости и самодиффузии и 2,5 % – в случае теплопроводности. Для реальных потенциалов взаимодействия молекул (типа потенциала Леннарда-Джонса) эти поправки оказываются еще меньше.

Сравним результаты (5.24) – (5.26) с выражениями, полученными выше на основе элементарной теории. Как видно, для модели твердых сфер различие проявляется лишь в числовых множителях. Так, для вязкости они практически мало отличаются друг от друга (0,176 и 0,179). В силу достаточно грубых предположений, положенных в основу элементарной теории, такое совпадение чисел следует считать случайным. В случае теплопроводности, например, различие между результатами оказывается весьма существенным. Так, в соотношении (5.25), связывающем теплопроводность и вязкость в строгой теории, численный коэффициент равен (5/2) вместо 1. Заметим, что это различие (в 2,5 раза) является общим независимо от принятой модели взаимодействия молекул. Объясняется оно тем, что в элементарной теории не учитывается корреляция между энергией и скоростью молекул (частицы, обладающие большой энергией, движутся быстрее и имеют поэтому больший свободный пробег).

Связь между коэффициентом самодиффузии  $[D_{11}]_I$  и коэффициентом вязкости  $[\eta]_I$  в строгой теории определяется соотношением [1,11]

$$\frac{\rho[D_{11}]_I}{[\eta]_I} = \frac{6}{5} A^*, \quad A^* = \frac{\Omega^{(2,2)}}{2\Omega^{(1,1)}} = \frac{\Omega^{(2,2)*}}{\Omega^{(1,1)*}}. \quad (5.27)$$

Для модели твердых сфер  $A^* = 1$  и соотношение (5.27) отличается от (5.17) коэффициентом 1,2. В случае произвольных потенциалов взаимодействия величина  $A^*$  оказывается слабой функцией температуры.

Следует подчеркнуть, что приведенные выше выражения для коэффициентов переноса (5.24) – (5.26) справедливы, вообще говоря, лишь для газов одноатомных молекул. Сравнение с экспериментом показывает, однако, что в большинстве случаев они оказываются вполне применимыми при расчете коэффициентов *вязкости* и *самодиффузии* в двухатомных и многоатомных газах. В случае *теплопроводности* ситуация иная и возникает необходимость в определенной модификации выражений (см. следующий параграф).

На основе выражений (5.24) – (5.26) было выполнено большое число расчетов коэффициентов переноса различных газов [11] с использованием в основном двухпараметрического потенциала Леннард-Джонса (3.34), который в случае простого газа принимает вид

$$U(r) = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]. \quad (5.28)$$

При записи соответствующих выражений для коэффициентов переноса удобно использовать приведенные  $\Omega$  - интегралы (4.88). В этом случае имеем

$$[\eta]_I = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi \sigma^2 \Omega^{(2,2)*}}, \quad (5.29)$$

$$[\kappa]_I = \frac{75}{64} \left( \frac{\pi k^3 T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi \sigma^2 \Omega^{(2,2)*}}, \quad (5.30)$$

$$[D_{11}]_I = \frac{3}{8n} \left( \frac{\pi k T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi \sigma^2 \Omega^{(1,1)*}}. \quad (5.31)$$

Формулы (5.29) – (5.31) полезно представить в виде, удобном для непосредственных расчетов

$$[\eta]_I \cdot 10^8 = 267,02 \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)*}(T^*)} \text{ Па}\cdot\text{с} , \quad (5.29')$$

$$[\kappa]_I \cdot 10^4 = 832,50 \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)*}(T^*)} \text{ Вт/К}\cdot\text{м} , \quad (5.30')$$

$$[D_{11}]_I \cdot 10^9 = 262,80 \frac{\sqrt{T^3/M}}{p \sigma^2 \Omega^{(1,1)*}(T^*)} \text{ м}^2/\text{с} . \quad (5.31')$$

Здесь молярная масса  $M$  подставляется в (г/моль), температура  $T$  – в К, давление  $p$  – в атм,  $\sigma$  – в (А°) (см. табл. 5.1).

Интегралы  $\Omega^*$  являются универсальной функцией безразмерной температуры  $T^* = kT/\varepsilon$ . Таблицы значений приведенных интегралов  $\Omega^{(1,1)*}$  и  $\Omega^{(2,2)*}$  в широком диапазоне значений  $T^*$  приведены в Приложении 2.

Параметры потенциала Леннард-Джонса  $\sigma$  и  $\varepsilon/k$  для ряда газов, полученные из экспериментальных данных по их вязкости, приводятся в табл. 5.1. Используя значения  $\sigma$ ,  $M$  из этой таблицы и значения приведенных  $\Omega^*(T^*)$ -интегралов из Приложения 2, по приведенным выше формулам нетрудно выполнить расчет любых интересующих нас коэффициентов переноса простого газа в заданном интервале температур.

Универсальность функции  $\Omega^{(2,2)*}$  и  $\Omega^{(1,1)*}$  позволяет сравнивать экспериментальные и теоретические данные по коэффициентам переноса, используя некоторые приведенные значения этих величин. Так, в случае вязкости можно ввести приведенное значение  $\eta^* = \eta \sigma^2 / \sqrt{m\varepsilon}$ . Тогда получаемые с использованием  $\sigma$  и  $\varepsilon$  из таблицы 5.1 значения  $\eta^*$  в функции от  $T^*$  должны ложиться на одну универсальную кривую.

Таблица 5.1

Газ	$M$ г/моль	$\sigma$ , $\text{Å}^\circ$	$\varepsilon/k$ , К	Газ	$M$ г/моль	$\sigma$ , $\text{Å}^\circ$	$\varepsilon/k$ , К
H <sub>2</sub>	2,016	2,915	38,0	SF <sub>6</sub>	146,05	5,252	207,7
N <sub>2</sub>	28,013	3,652	98,4	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28,054	4,071	244,3
O <sub>2</sub>	31,99	3,407	121,1	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30,070	4,371	241,9
NO	30,006	3,474	125,0	He	4,003	2,610	10,40
CO	28,010	3,652	98,4	Ne	20,179	2,755	42,00
CO <sub>2</sub>	44,010	3,769	245,3	Ar	39,948	3,350	141,5
N <sub>2</sub> O	44,013	3,703	266,8	Kr	83,80	3,571	197,8
CH <sub>4</sub>	16,043	3,721	161,4	Xe	131,29	3,885	274,0

На рис. 5.2 представлена зависимость  $\ln\left(\eta^*/\sqrt{T^*}\right)$  от  $\ln T^*$ , построенная на основе экспериментальных данных по вязкости для некоторых газов [10,11].

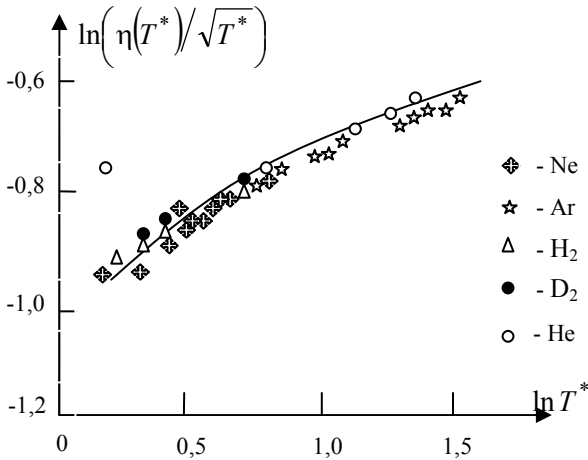


Рис. 5.2

Сплошная кривая соответствует теоретической кривой. Как видно, температурная зависимость вязкости хорошо подтверждается теорией. Некоторое расхождение данных для гелия при относительно низких температурах объясняется необходимостью принимать во внимание квантовые поправки.

Аналогичные зависимости были получены для приведенных коэффициентов самодиффузии  $D_{11}^* = D_{11} / \sigma \sqrt{m/\varepsilon}$  в функции  $T^*$ . Сравнение для десяти исследованных газов (см [9]) показали и в этом случае удовлетворительное совпадение экспериментальных и теоретических результатов.

Следует подчеркнуть, что использование потенциала Леннар-Джонса оказывается эффективным лишь в случае неполярных газов, молекулы которых не обладают собственным дипольным моментом. Для полярных газов типа  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $HJ$  и т.п. поведение коэффициентов переноса относительно этого потенциала оказывается аномальным. Можно улучшить совпадение теоретических и экспериментальных результатов, если несколько модифицировать потенциал (5.28), добавив к нему член, пропорциональный  $r^{-3}$ , описывающий взаимодействие двух точечных диполей (потенциал Штокмайера). Потенциал становится при этом трехпараметрическим. Значения еще одного параметра, соответствующего введенной поправке, для различных полярных газов можно найти в [9,19].

### **5.6. Теплопроводность многоатомных газов. Фактор Эйкена**

Если температура в газе неоднородна, то в случае многоатомных газов с возбужденными внутренними степенями свободы молекул помимо переноса поступательной энергии молекул существует дополнительный перенос их внутренней энергии. Общее выражение для теплового потока записывается при этом в виде (3.12). На феноменологическом уровне возникающая за счет этого переноса поправка к коэффициенту теплопроводности впервые была получена Эйкеном на основе достаточно простых соображений. Эйкен предположил, что в отличие от переноса поступательной энергии, когда необходимо учитывать корреляцию между тепловой скоростью молекул и их кинетической энергией (что приводит, как уже отмечалось, к появлению множителя  $(5/2)$  в соотношении (5.25)), кор-

реляцией между тепловой скоростью и внутренней энергией молекул можно пренебречь. Это позволяет представить теплопроводность многоатомных газов в виде суммы двух слагаемых, одно из которых определяется соотношением типа (5.25), но с поступательной составляющей теплоемкости  $c_V = c_V^{tr}$ , а другое – аналогичным соотношением, в котором множитель (5/2) заменяется на единицу, а поступательная составляющая теплоемкости заменяется на внутреннюю теплоемкость  $c_V^{int}$ . Формально это можно записать в следующем виде

$$\lambda = \lambda^{tr} + \lambda^{int} = (c_V^{tr} f^{tr} + c_V^{int} f^{int}) \eta . \quad (5.32)$$

Здесь  $f^{tr} = 5/2$ ,  $f^{int} = 1$ , а соответствующие удельные теплоемкости определены как

$$c_V^{tr} = \frac{3}{2} \frac{k}{m} = \frac{3}{2} \frac{R}{M} , \quad c_V^{int} = c_V - c_V^{tr} ,$$

где  $c_V$  – полная удельная теплоемкость газа. Определим величину  $f$ , которая называется фактором Эйкена,

$$f = \frac{\lambda}{c_V \eta} .$$

Для одноатомных газов, очевидно,  $f = f^{tr} = 5/2$ . Для газа из многоатомных молекул, используя (5.32), приходим к формуле Эйкена

$$f = \frac{15}{4} \frac{R}{Mc_V} + \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{R}{Mc_V} \right) \quad (5.33)$$

Напомним, что удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме связаны соотношением  $c_p = c_V + R/M$ . Это позволяет преобразовать выражение (5.33) к виду

$$f = \frac{9\gamma - 5}{4} = 2,25\gamma - 1,25 , \quad (5.33')$$

где  $\gamma = c_p / c_V$ .

Сделаем несколько простых оценок с помощью формулы (5.33'). Для двухатомных газов при относительно невысоких температурах, когда можно пренебрегать вкладом колебательных степеней свободы молекул

$$c_V^{\text{int}} = c_V^{\text{rot}} = \frac{R}{M}, \quad c_V = \frac{5}{2} \frac{R}{M}, \quad \gamma = 1,4, \quad f = 1,9.$$

С ростом температуры отношение  $c_V^{\text{vib}} / c_V^{\text{rot}}$  увеличивается от значений, много меньших единицы, до значений порядка единицы.

Если принять  $c_V^{\text{vib}} = R/M$ , то получим

$$c_V^{\text{int}} = \frac{2R}{M}, \quad c_V = \frac{7}{2} \frac{R}{M}, \quad \gamma = \frac{9}{7}, \quad f \approx 1,64.$$

Величина фактора Эйкена меняется, таким образом, от значения 2,5 в случае одноатомных газов до 1,64 в случае газа двухатомных молекул и до еще меньших величин в случае газа из молекул, состоящих из нескольких атомов.

Дальнейшее развитие теории теплопроводности в молекулярных газах (см. [1,2]) показало, что более точным является выражение для фактора  $f$ , в котором для  $f^{\text{int}}$  вместо единицы следует выбрать значение  $\rho D_{11} / \eta$ , так что

$$f = \frac{\lambda}{c_V \eta} = \frac{5}{2} \frac{c_V^{\text{tr}}}{c_V} + \frac{\rho D_{11}}{\eta} \frac{c_V^{\text{int}}}{c_V}. \quad (5.34)$$

Поскольку коэффициенты самодиффузии и вязкости молекулярного газа с достаточной точностью определяются выражениями, справедливыми для одноатомных газов, для интересующего нас отношения величин можно использовать результат (5.27), т.е.  $\rho D / \eta = 1,2A^*$ . В случае потенциала Леннард-Джонса, используя

таблицы  $\Omega^*$ , приведенные в Приложении, легко установить, что величина  $A^*$  меняется в пределах от 1,046 до 1,154, поэтому отношение  $\rho D / \eta$  можно приближенно положить равным 1,32. В этом случае модифицированная формула Эйкена принимает вид.



$$f = 1,77 \gamma - 0,45 . \quad (5.35)$$

### 5.7. Вязкость и теплопроводность газовых смесей

Элементарную теорию явлений переноса в случае вязкости и теплопроводности нетрудно обобщить на случай газовой смеси. Для произвольной газовой смеси, состоящей из  $N$  компонентов ( $N$  типов молекул), тензор вязких напряжений и вектор теплового потока определяются простым суммированием по  $N$

$$\pi_{rs} = \sum_{\alpha=1}^N \pi_{\alpha rs} = -2\eta S_{rs}, \quad \eta = \sum_{\alpha=1}^N \eta_{\alpha} , \quad (5.36)$$

$$\mathbf{q} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{q}_{\alpha} = -\lambda \nabla T, \quad \lambda = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} . \quad (5.37)$$

Здесь  $\eta_{\alpha}$  и  $\lambda_{\alpha}$  – парциальные коэффициенты вязкости и теплопроводности (не путать с соответствующими коэффициентами для чистых компонентов),  $\eta$  и  $\lambda$  – соответствующие коэффициенты для смеси.

При получении линейных соотношений переноса и выражений для парциальных коэффициентов переноса можно использовать общее уравнение переноса элементарной теории (5.2), записав его для компонента  $\alpha$  смеси,

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{2} n_{\alpha} \langle v_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha} \frac{\partial G_{\alpha}}{\partial x} . \quad (5.38)$$

Обобщая соответствующую процедуру вывода соотношений для тензора вязких напряжений и теплового потока в простом газе на случай газовой смеси, для парциальных вязких напряжений  $\pi_{\alpha yx}$  и тепловых потоков  $q_{\alpha}$  получаем

$$\pi_{\alpha yx} = -\eta_{\alpha} \frac{du_y}{dx}, \quad q_{\alpha} = -\kappa_{\alpha} \frac{dT}{dx}, \quad (5.39)$$

где

$$\eta_{\alpha} = \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \lambda_{\alpha} \langle v_{\alpha} \rangle, \quad \kappa_{\alpha} = \frac{1}{2} \rho_{\alpha} c_{V\alpha} \lambda_{\alpha} \langle v_{\alpha} \rangle. \quad (5.40)$$

Здесь  $\rho_{\alpha} = m_{\alpha} n_{\alpha}$ ,  $\langle v_{\alpha} \rangle = (8kT/\pi m_{\alpha})^{1/2}$ ,  $c_{V\alpha}$  – парциальная удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\lambda_{\alpha}$  – средняя длина свободного пробега частиц сорта  $\alpha$  в смеси, определяемая выражением (4.70) главы 4.

Рассмотрим сначала вопрос о вязкости газовой смеси. Обозначим через  $\eta_{\alpha\alpha}$  коэффициент вязкости чистого газа, образованного из молекул сорта  $\alpha$ . Используя (4.70) и формулы для вязкости простого газа (5.4) – (5.5), для парциального коэффициента вязкости приходим к выражению

$$\eta_{\alpha} = \frac{\eta_{\alpha\alpha}}{1 + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{v_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\alpha}}} = \frac{\eta_{\alpha\alpha}}{1 + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N G_{\alpha\beta} \frac{x_{\beta}}{x_{\alpha}}}. \quad (5.41)$$

Здесь

$$\eta_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2\pi} \frac{kT}{\Omega_{\alpha\alpha}^{(0,1)}}, \quad G_{\alpha\beta} = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{(0,1)}}{\Omega_{\alpha\alpha}^{(0,1)}}, \quad (5.42)$$

где использованы соотношения (5.6) и (4.83).

Для вязкости  $N$ -компонентной газовой смеси получаем

$$\eta = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\eta_{\alpha\alpha}}{1 + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N G_{\alpha\beta} \frac{x_{\beta}}{x_{\alpha}}}. \quad (5.43)$$

Выражение для коэффициента вязкости смеси в форме (5.43), предложенное еще в 1904 г., известно как *формула Васильевой*. Многие последующие исследования, основанные на различных мо-

дификациях элементарной кинетической теории, являлись лишь попыткой дать более достоверные выражения для параметра  $G_{\alpha\beta}$ .

Выражения (5.41) и (5.43) можно скорректировать, используя в качестве вязкостей чистых компонентов  $\eta_{\alpha\alpha}$  результаты строгой теории либо экспериментально определяемые величины. С другой стороны, для величины  $G_{\alpha\beta}$  в случае модели молекул – твердых сфер, используя соотношения (4.86) – (4.87), получаем

$$G_{\alpha\beta} = 2 \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)}}{\Omega_{\alpha\alpha}^{(2,2)}} . \quad (5.44)$$

Выразим это отношение через значения коэффициентов вязкости  $[\eta_{\alpha\alpha}]_1$  и бинарной диффузии  $[D_{\alpha\beta}]_1$  (см. следующий параграф), получаемые на основе строгой теории.

В результате

$$G_{\alpha\beta} = \frac{6}{5} \frac{m_\alpha + m_\beta}{2m_\alpha m_\beta} \frac{kT}{p} \frac{[\eta_{\alpha\alpha}]_1}{[D_{\alpha\beta}]_1} . \quad (5.45)$$

Более обоснованный, хотя и приближенный результат *Брокау* (см. [11]), получается в результате разложения определителей, через которые записывается вязкость смеси в формулах строгой теории. В этом случае

$$G_{\alpha\beta} = \frac{6}{5} A_{\alpha\beta}^* \frac{kT}{m_\alpha p} \frac{[\eta_{\alpha\alpha}]_1}{[D_{\alpha\beta}]_1} . \quad (5.46)$$

Здесь  $A_{\alpha\beta}^* = \Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)*} / \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)*}$ . С учетом слабого изменения величины  $A_{\alpha\beta}^*$  с температурой для модели Леннард-Джонса можно использовать некоторое среднее значение величины  $(6/5)A_{\alpha\beta}^* = 1,32$  вместо 1,2 в формуле (5.46).

Заметим, что расчет вязкости смеси по формуле (5.43) с использованием (5.45) или (5.46) дает довольно близкие результаты, если массы частиц компонентов различаются не слишком заметно. В общем случае следует пользоваться более достоверным результатом (5.46).

На практике для расчета вязкости смеси на основе известных экспериментальных данных по вязкостям чистых газов и измеренных коэффициентов бинарной диффузии часто используется общая формула (5.43), в которой

$$G_{\alpha\beta} = 1,385 \frac{kT}{pm_\alpha} \frac{\eta_{\alpha\alpha}}{D_{\alpha\beta}}. \quad (5.47)$$

Здесь  $\eta_{\alpha\alpha}$  и  $D_{\alpha\beta}$  – экспериментально определяемые коэффициенты вязкости чистых газов и коэффициенты бинарной диффузии. Выражение для  $G_{\alpha\beta}$  в виде (5.47) было предложено Уилки и Бадденбергом [11,19] на основе обработки большого массива экспериментальных данных для двухкомпонентных смесей различных газов, в результате чего в выражении появился эмпирический коэффициент 1,385. Известна также формула Уилки [19], в которой фигурируют лишь вязкости чистых компонентов,

$$G_{\alpha\beta} = \left[ \frac{m_\beta}{8(m_\alpha + m_\beta)} \right]^{1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\eta_{\alpha\alpha}}{\eta_{\beta\beta}} \right)^{1/2} \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha} \right)^{1/4} \right]^2. \quad (5.48)$$

Использованный выше подход можно применить и для получения соответствующих выражений в случае теплопроводности смеси. При этом парциальная теплопроводность компонента  $\alpha$  определяется выражением

$$\kappa_\alpha = \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{1 + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{\nu_{\alpha\beta}}{\nu_{\alpha\alpha}}}, \quad (5.49)$$

а для теплопроводности смеси опять приходим к выражению, аналогичному по своей структуре формуле для вязкости смеси,

$$\kappa = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{1 + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N H_{\alpha\beta} \frac{x_{\beta}}{x_{\alpha}}}, \quad (5.50)$$

где  $\kappa_{\alpha\alpha}$  – коэффициент теплопроводности чистого газа, образованного из молекул сорта  $\alpha$ . Для одноатомных газов связь  $\kappa_{\alpha\alpha}$  и  $\eta_{\alpha\alpha}$  в первом приближении строгой теории определяется соотношением

$$[\kappa_{\alpha\alpha}]_1 = \frac{15}{4} \frac{k}{m_{\alpha}} [\eta_{\alpha\alpha}]_1. \quad (5.51)$$

В приближении, соответствующем элементарной теории, можно положить  $H_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}$ , где  $G_{\alpha\beta}$  определяется выражением (5.45) либо (5.46). Выражение для  $H_{\alpha\beta}$ , полученное Брокау (см. [11]) разложением соответствующих определителей, через которые записывается теплопроводность смеси в формулах строгой теории, оказывается существенно более сложным, чем соответствующее выражение (5.46) для вязкости. На практике для определения  $H_{\alpha\beta}$  часто используется формула *Мэзона-Саксены* [11], в которой фигурируют теплопроводности чистых компонентов

$$H_{\alpha\beta} = 1,065 \left[ \frac{m_{\beta}}{8(m_{\alpha} + m_{\beta})} \right]^{1/2} \left[ 1 + \left( \frac{[\kappa_{\alpha\alpha}]_1}{[\kappa_{\beta\beta}]_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right)^{1/4} \right]^2, \quad (5.52)$$

где коэффициент 1,065 вводится эмпирическим путем для улучшения согласия с экспериментом.

Приводимые выше выражения для теплопроводности смеси справедливы, вообще говоря, лишь для смеси одноатомных газов. Если в состав смеси входят газовые компоненты из двухатомных

либо многоатомных молекул, хорошим приближением при расчетах теплопроводности оказывается формула *Эйкена-Гирифелдера* [10]

$$\kappa = \kappa_{\text{mon}} + \sum_{\alpha=1}^N n c_{\alpha}^{\text{int}} [D_{\alpha\alpha}]_1 \left[ 1 + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_{\beta} [D_{\alpha\alpha}]_1}{x_{\alpha} [D_{\alpha\beta}]_1} \right]^{-1}. \quad (5.53)$$

При этом  $\kappa_{\text{mon}}$  вычисляется по формулам теории одноатомных газовых смесей,  $c_{\alpha}^{\text{int}}$  – удельная теплоемкость, соответствующая внутренним степеням свободы молекул компонента  $\alpha$ ,  $[D_{\alpha\alpha}]_1$  и  $[D_{\alpha\beta}]_1$  – соответственно коэффициенты самодиффузии и бинарной диффузии, которые либо рассчитываются по известным формулам первого приближения Чепмена-Каулинга, либо берутся из эксперимента.

## ГЛАВА 6. ДИФФУЗИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ

Неравновесные явления в газовых смесях отличаются бóльшим разнообразием, чем в простом газе, поскольку наряду с вязкостью и теплопроводностью важную роль приобретают *диффузионные явления*. С пространственной неоднородностью концентрации компонентов смеси связано явление так называемой *концентрационной диффузии*, присутствие градиента давления вызывает *бародиффузию*, а наличие градиента температуры – *термодиффузию*. Как отмечалось в предыдущей главе, использование метода средней длины свободного пробега при рассмотрении диффузионных явлений в газовой смеси (за исключением *самодиффузии*) оказывается мало эффективным. Поэтому ниже мы используем другой подход, который можно назвать *методом баланса импульса*. Идея использования этого метода восходит еще к работам Максвелла и Стефана, интерес к его применению при анализе диффузии в газах возродился 50-х годах прошлого века (см. [26]), в кинетике газов и плазмы он использовался в работах Т. Каулинга [27] и Д.А.Франк-Каменецкого [7,28].

### 6.1. Метод баланса импульса. Сила диффузионного трения

Выделим в газе малый цилиндрический объем толщиной  $dx$  с поперечным сечением  $S$  (рис. 6.1).

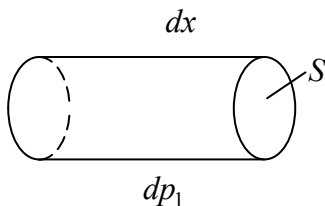


Рис.6.1

Сила, действующая на молекулы компонента 1 в этом объеме и связанная с наличием неоднородности парциального давления компонента вдоль оси  $X$ , равна, очевидно,

$$[p_1 - (p_1 + dp_1)]S = -S dp_1 = \left(-\frac{dp_1}{dx}\right) S dx$$

В стационарном состоянии эта сила должна уравниваться силой диффузионного трения, действующей на молекулы компонента 1 со стороны молекул компонента 2. Природа этой силы связана с тем, что при столкновении разнородных молекул смеси происходит передача импульса от частиц компонента 1 частицам другого компонента. Средняя величина теряемого при столкновениях импульса, отнесенная к единице объема и единице времени, обозначалась выше как  $\mathbf{R}_1$  и рассчитывалась в параграфе 4.10. Условие баланса сил, вызванных наличием градиента парциального давления компонента и силы диффузионного трения, для объема  $S dx$  в установившемся режиме диффузии может быть записано в виде

$$\left(-\frac{dp_1}{dx}\right) S dx + R_1 S dx = 0$$

или

$$\frac{dp_1}{dx} = R_1 . \quad (6.1)$$

Напомним, что выражение для  $\mathbf{R}_1$ , получаемое с использованием определенного приближения к функциям распределения молекул компонентов (4.74), имеет вид

$$\mathbf{R}_1 = -n_1 \mu_{12} \bar{v}_{12} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) , \quad (6.2)$$

где  $\mu_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – приведенная масса молекул,  $\bar{v}_{12}$  – эффективная частота столкновений с передачей импульса (см. формулу (4.78)).

Для того чтобы лучше уяснить физический смысл этого результата, мы дадим здесь еще один более простой вывод выражения для  $\mathbf{R}_1$ , используя модель твердых сферических молекул. Пусть  $z_{12}$  – число столкновений, испытываемых молекулой сорта 1 в единицу времени с молекулами сорта 2, а  $\Delta \mathbf{p}_1$  – изменение импульса молекулы 1 при одном таком столкновении. Полное изменение импульса молекулы сорта 1 в результате столкновений равно, очевидно,



$z_{12}\Delta\mathbf{p}_1$ . Соответствующее среднее изменение импульса получается усреднением по всем столкновениям. Примем для простоты, что среднее значение произведения двух величин можно приближенно заменить произведением средних, т.е. будем определять величину  $\mathbf{R}_1 = \bar{z}_{12}\langle\Delta\mathbf{p}_1\rangle$ . Величину  $\bar{z}_{12}$  положим равной средней частоте столкновений  $v_{12}^{(1)}$  частиц сорта 1 с частицами сорта 2, которая для модели молекул–твердых сфер определяется выражением (4.63)

$$v_{12}^{(1)} = n_2\langle g\rangle\pi d_{12}^2, \quad \langle g\rangle = \left(\frac{8kT}{\pi\mu_{12}}\right)^{1/2}.$$

При усреднении  $\Delta\mathbf{p}_1$  обращается в нуль та часть величины  $\langle\Delta\mathbf{p}_1\rangle$ , которая связана с тепловым движением частиц, поэтому  $\langle\Delta\mathbf{p}_1\rangle = m_1\langle\Delta\mathbf{u}_1\rangle$ . Известно (см., например, [13, 21]), что для молекул, представляемых в виде твердых упругих сфер, их рассеяние в результате столкновений оказывается изотропным в системе отсчета, связанной с их центром масс. Это означает, что в этой системе отсчета скорости упорядоченного движения молекул каждого сорта после столкновения равны нулю, а значит в обычной (лабораторной) системе отсчета обе эти скорости равны скорости центра масс  $\mathbf{G}$ . Поскольку  $\mathbf{G} = (m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2)/(m_1 + m_2)$ , для среднего изменения скорости  $\mathbf{u}_1$  при столкновении имеем

$$\langle\Delta\mathbf{u}_1\rangle = \mathbf{G} - \mathbf{u}_1 = \frac{m_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)}{m_1 + m_2}$$

или

$$\langle\Delta\mathbf{p}_1\rangle = \mu_{12}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1).$$

В результате средняя передача импульса в единичном объеме смеси от всех молекул сорта 1 молекулам сорта 2 определяется как

$$\mathbf{R}_1 = -n_1\mu_{12}v_{12}^{(1)}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2). \quad (6.3)$$

Как видно, различие между выражениями (6.3) и (6.2) проявляется в определении эффективных частот столкновений. Для модели

твердых сфер  $v_{12}^{(1)} = (3/4)\bar{v}_{12}$ , т.е. результаты приближенного и строгого расчета отличаются лишь множителем  $(3/4)$ .

## 6.2. Концентрационная диффузия

Начнем анализ диффузионных явлений с вывода выражения для диффузионного потока, вызванного неоднородностью концентрации компонентов смеси. Ограничимся для простоты случаем бинарной смеси газов.

Напомним, что молярный диффузионный поток компонента 1 в смеси определяется выражением (3.58)

$$\mathbf{J}_1^m = n_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}^m) = \frac{n_1 n_2}{n}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \quad \mathbf{J}_2^m = -\mathbf{J}_1^m. \quad (6.4)$$

Запишем теперь уравнение баланса импульса для компонента 1 (6.1) с учетом выражения для  $\mathbf{R}_1$  (6.2) в проекции на направление оси  $X$

$$n_1 \mu_{12} \bar{v}_{12} (u_1 - u_2) = -\frac{dp_1}{dx}. \quad (6.5)$$

Выражая отсюда разность скоростей компонентов, для молярного диффузионного потока (6.4) получаем

$$J_1^m = -D_{12} \frac{dn_1}{dx} = -n D_{12} \frac{dx_1}{dx}. \quad (6.6)$$

Здесь использованы соотношение  $p_1 = n_1 kT$ , определение  $x_1 = n_1/n$  и предполагается, что полное давление  $p$  и температура газа  $T$  поддерживаются постоянными. Коэффициент пропорциональности в выражении (6.6) соответствует коэффициенту бинарной диффузии  $D_{12}$  и определяется выражением

$$D_{12} = \frac{n_2 kT}{n \mu_{12} \langle v_{12} \rangle} = \frac{3}{4} \frac{kT}{n \mu_{12} \langle g \rangle \langle Q_{12}^{(1)} \rangle}, \quad (6.7)$$

где  $\langle g \rangle = (8kT/\pi\mu_{12})^{1/2}$ , а  $\langle Q_{12}^{(1)} \rangle$  – среднее эффективное сечение с передачей импульса (формула (4.79)). Удобно выразить  $D_{12}$ , ис-

пользуя также определение интеграла  $\Omega_{12}^{(1,1)}$ , который связан с  $\bar{v}_{12}$  соотношением (4.84). В этом случае получаем

$$D_{12} = \frac{3}{16} \frac{kT}{n\mu_{12}\Omega_{12}^{(1,1)}} . \quad (6.8)$$

Примечательно, что выражение (6.8) в точности совпадает с результатом строгой кинетической теории, соответствуя коэффициенту бинарной диффузии, получаемому в первом приближении Чепмена-Каулинга [1], т.е.  $D_{12} = [D_{12}]_1$ .

Важный вывод, следующий из формулы (6.8), заключается в том, что коэффициент бинарной диффузии практически не зависит от концентрации компонентов в смеси. В строгой теории слабая зависимость от концентрации возникает лишь при использовании второго приближения в разложении по полиномам Сонина. Возникающая поправка для реальных потенциалов взаимодействия составляет не более 1.5 %, поэтому оказывается практически несущественной. Вывод о практической независимости  $D_{12}$  от концентрации хорошо подтверждается экспериментом.

Для модели молекул – твердых сфер, учитывая (3.83), получаем

$$[D_{12}]_1 = \frac{3}{16n} \left( \frac{2\pi kT}{\mu_{12}} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d_{12}^2} . \quad (6.9)$$

Для модели потенциала Леннард-Джонса имеем

$$[D_{12}]_1 = \frac{3}{16n} \left( \frac{2\pi kT}{\mu_{12}} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi \sigma_{12}^2 \Omega_{12}^{(1,1)*}} . \quad (6.10)$$

Формулу (6.10) можно представить также в виде, удобном для непосредственных расчетов

$$[D_{12}]_1 \cdot 10^9 = 262,80 \sqrt{\frac{T^3 (M_1 + M_2) / 2M_1 M_2}{p \sigma_{12}^2 \Omega_{12}^{(1,1)*} (T_{12}^*)}} . \quad (6.10')$$

Здесь молярная масса  $M_\alpha$  подставляется в (г/моль), температура  $T$  – в К, давление  $p$  – в атм,  $\sigma_{12}$  – в (А°). При этом  $\sigma_{12} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ , а приведенные интегралы  $\Omega_{12}^{(1,1)*}$  являются уни-

версальной функцией безразмерной температуры  $T^* = kT/\varepsilon_{12}$ , где  $\varepsilon_{12} = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ . Таблицы интегралов  $\Omega_{12}^{(1,1)*}$  приведены в Приложении 2.

Полученные выражения должны описывать и самодиффузию молекул в газе. Для этого случая в формулах (6.9) или (6.10) надо положить  $\mu_{12} = m/2$  и  $d_{12} = d$  или  $\sigma_{12} = \sigma$ . В результате для модели молекул – твердых сфер, например, получаем

$$[D_{11}]_1 = \frac{3}{8n} \left( \frac{\pi kT}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2}. \quad (6.11)$$

Этот результат отличается от выражения для  $D_{11}$  (5.16), полученного методом средней длины свободного пробега в газе, лишь численным множителем  $(3\pi/8) = 1,179$ .

### **6.3. Уравнение движения для отдельного компонента смеси. Бародиффузия**

Уравнение (6.2) представляет собой частную форму записи более общего уравнения баланса импульса для отдельного компонента смеси (3.38), которое для случая стационарных медленных течений газа в отсутствие внешних сил и в пренебрежении влиянием вязкости принимает вид

$$\nabla p_\alpha = \mathbf{R}_\alpha. \quad (6.12)$$

Легко показать, что исходное уравнение баланса импульса (3.38), рассматривавшееся в главе 3, с помощью уравнения непрерывности (3.34) можно преобразовать к виду [18]

$$\rho_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{P}}_\alpha^* - n_\alpha \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha. \quad (6.13)$$

Здесь используются обозначения  $d_\alpha/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)$  и  $P_{\alpha rs}^* = P_{\alpha rs} - \rho_\alpha w_{\alpha r} w_{\alpha s}$ . Выражение для  $\mathbf{R}_\alpha$  определяется формулой (4.80). Учитывая связь между  $\bar{V}_{\alpha\beta}$  и  $[D_{\alpha\beta}]_1$ , можно также представить правую часть (6.13) в виде

$$\mathbf{R}_\alpha = - \sum_\beta \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta). \quad (6.14)$$

Напомним что уравнение *движения* для газовой смеси в целом имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \hat{\mathbf{P}} - \sum_\alpha n_\alpha \mathbf{F}_\alpha = 0, \quad (6.15)$$

поэтому уравнение (6.13) имеет похожую структуру и может трактоваться как *уравнение движения отдельного компонента смеси*.

В уравнении (6.13) можно приближенно положить  $P_{\alpha rs}^* = P_{\alpha rs}$ , что соответствует пренебрежению членами, квадратичными относительно малых диффузионных скоростей  $\mathbf{w}_\alpha$ . Кроме того, мы будем использовать далее так называемое *приближение равных ускорений* [7], положив  $d_\alpha \mathbf{u}_\alpha / dt \approx d\mathbf{u} / dt$ . Различие между этими величинами имеет порядок  $d\mathbf{w}_\alpha / dt$ . Эту разность, умноженную на  $\rho_\alpha$ , можно сравнить с правой частью уравнения (6.13), которая в соответствии с определением  $\mathbf{R}_\alpha$  (4.80) имеет порядок  $\rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha / \tau_{\alpha\beta}$ , где  $\tau_{\alpha\beta} = 1/\bar{v}_{\alpha\beta}$ . При обычно выполняющемся условии  $\tau_{\alpha\beta} \ll \tau_L$  указанной разницей ускорений можно пренебречь. Тогда, выражая  $d\mathbf{u}/dt$  из общего уравнения движения смеси (6.15) и подставляя его в уравнение (6.13), получаем

$$\left( \nabla p_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \nabla p \right) + \left( \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha \right) = \mathbf{R}_\alpha. \quad (6.16)$$

Мы опустили здесь члены, пропорциональные вязким напряжениям, полагая  $P_{\alpha rs} = p_\alpha \delta_{rs}$ . Для массовых сил (например, сил тяжести или центробежных сил), когда силы  $\mathbf{F}_\alpha$  пропорциональны массе частицы  $m_\alpha$ , второй член в скобках в (6.16) обращается в нуль. С учетом выражения для  $\mathbf{R}_\alpha$  (6.14) уравнение (6.16) можно представить тогда в виде

$$\sum_{\beta} \frac{n_{\alpha} n_{\beta} kT}{n [D_{\alpha\beta}]_1} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) = -p \mathbf{d}_{\alpha} . \quad (6.17)$$

Справа мы ввели здесь величину  $p \mathbf{d}_{\alpha}$ , называемую *термодинамической силой диффузии*, при этом

$$\mathbf{d}_{\alpha} = \nabla x_{\alpha} + \left( x_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \right) \nabla \ln p . \quad (6.18)$$

Система уравнений (6.17) носит название *уравнений Стефана-Максвелла* [10]. Решение этой системы позволяет найти значения всех диффузионных скоростей компонентов смеси, если использовать дополнительное соотношение

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0 , \quad (6.19)$$

следующее из определения среднемассовой скорости смеси.

Для бинарной смеси газов, из (6.17) и (6.18) с учетом определения (6.4) для молярного диффузионного потока компонента 1 получаем

$$\mathbf{J}_1^m = -n [D_{12}]_1 \left[ \nabla x_1 + k_p \nabla \ln p \right] . \quad (6.20)$$

Здесь

$$k_p = \alpha_p x_1 x_2 - \quad (6.21)$$

*коэффициент бародиффузии* смеси, а коэффициент  $\alpha_p$  носит название *постоянной бародиффузии*. Из определения  $\mathbf{d}_1$  (6.18) следует

$$\alpha_p = \frac{m_2 - m_1}{m_1 x_1 + m_2 x_2} . \quad (6.22)$$

Любопытно, что точно такое же выражение получается при использовании методов неравновесной термодинамики [4,9]. Заметим, что постоянная  $\alpha_p$  (6.22) зависит только от масс и концентраций компонентов смеси, поэтому она не относится к категории *кинетических параметров*, определяемых в том числе эффективными сечениями столкновений частиц.

При получении системы уравнений (6.17) мы пренебрегали членами, связанными с вязкими напряжениями в газе. Можно показать, что они приобретают важное значение, если рассматривать медленные вязкие течения смеси [29,18]. Рассмотрим, например, стационарное вязкое течение газовой смеси в плоском канале вдоль оси  $X$  под действием градиента давления  $dp/dx$ . Уравнения движения (6.13) и (6.15) для компонента 1 и для смеси в целом принимают в этом случае вид

$$\frac{dp_1}{dx} + \frac{\partial \pi_{1xy}}{\partial y} = -\frac{n_1 n_2 kT}{n[D_{12}]_1} (u_{1x} - u_{2x}) , \quad (6.23)$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial y} = 0 . \quad (6.24)$$

Используя соотношения

$$\pi_{1xy} = -\eta_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} , \quad \pi_{xy} = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial y} ,$$

получаем

$$\frac{\partial \pi_{1xy}}{\partial y} = -\eta_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} , \quad \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial y} = -\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -\frac{dp}{dx} . \quad (6.25)$$

Соотношения (6.25) позволяют выразить второй член слева в уравнении движения для компонента 1 (6.23) через градиент полного давления. В результате получаем

$$\frac{dp_1}{dx} - \frac{\eta_1}{\eta} \frac{dp}{dx} = -\frac{n_1 n_2 kT}{n[D_{12}]_1} (u_{1x} - u_{2x}) . \quad (6.26)$$

Для молярного диффузионного потока в этом случае имеем

$$J_{1x}^m = -n[D_{12}]_1 \left( \frac{dx_1}{dx} + [\alpha_p^v]_1 x_1 x_2 \frac{d \ln p}{dx} \right) , \quad (6.27)$$

где  $[\alpha_p^v]_1$  – постоянная бародиффузии в вязком потоке, определяемая как [29]

$$[\alpha_p^v]_1 = \frac{1}{\eta} \left( \frac{\eta_2}{x_2} - \frac{\eta_1}{x_1} \right). \quad (6.28)$$

Для приближенного расчета постоянной бародиффузии  $[\alpha_p^v]_1$  можно использовать конкретные выражения для парциальных вязкостей компонентов смеси, полученные в параграфе 5.4 в рамках элементарной кинетической теории, несколько модифицированной с учетом результатов строгой теории. Для бинарной смеси газов

$$\eta_1 = \frac{\eta_{11}}{1 + G_{12} \frac{x_2}{x_1}}, \quad \eta_2 = \frac{\eta_{22}}{1 + G_{21} \frac{x_1}{x_2}}, \quad (6.29)$$

где  $\eta_{\alpha\alpha}$  – вязкости чистых компонентов, а  $G_{\alpha\beta}$  определяется выражением (5.48).

Заметим, что в отличие от постоянной бародиффузии (6.22), параметр  $\alpha_p^v$  (6.28) зависит не только от масс, но и от эффективных сечений столкновений молекул, т.е. является существенно *кинетической* величиной и может, в принципе, иметь любой знак. Это особенно наглядно проявляется, если рассмотреть случай малого относительного различия масс и эффективных сечений столкновений молекул смеси. В частности для модели молекул - твердых сфер с диаметрами  $d_1$  и  $d_2$  расчеты, соответствующие первому приближению строгой теории дают [29]

$$[\alpha_p^v]_1 = 1,13 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} - 1,50 \frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1}. \quad (6.30)$$

Полученные выражения для  $[\alpha_p^v]_1$  оказываются существенными при анализе процессов разделения газовых и изотопных смесей при течении их через узкие капилляры и мелкодисперсные пористые среды (диффузионный метод разделения изотопов [30])

#### 6.4. Термодиффузия в газовой смеси

Наряду с обычной концентрационной диффузией и бародиффузией в газовой смеси может возникать также относительное движение



ее компонентов, вызванное неоднородностью (градиентом) температуры. Это явление называется *термической диффузией* или просто *термодиффузией*. Если, например, газовая смесь находится в замкнутом объеме и имеет первоначально постоянный состав, то термическая диффузия, возникающая из-за наличия градиента температуры, приводит через некоторое время к появлению неоднородности состава смеси (градиента концентрации). Поскольку эта неоднородность, в свою очередь, вызывает обычную (концентрационную) диффузию, то в установившемся состоянии между границами объема возникает разность концентраций, при которой разделительное действие термической диффузии уравнивается перемешивающим эффектом обычной диффузии. Таким образом, термодиффузия вызывает частичное разделение компонентов первоначально однородной смеси. Именно этот эффект положен в основу экспериментальных методов обнаружения термодиффузии и измерения соответствующих параметров, характеризующих этот процесс [31].

В принципе явление термодиффузии предсказывается выводами феноменологической неравновесной термодинамики [9]. Однако на практике об этом явлении стало известно лишь после того, как в 1911 г. Д. Энског и независимо от него С. Чепмен построили общую кинетическую теорию явлений переноса в газах и газовых смесях. Хотя диффузия в смеси газов на кинетическом уровне детально рассматривалась еще в работах Максвелла, для получения конкретных результатов ему пришлось использовать одно очень сильное допущение о характере взаимодействия молекул между собой. Это допущение, существенно упрощавшее расчеты, предполагало, что молекулы, представляющие собой точечные центры сил, отталкиваются друг от друга с силой, убывающей обратно пропорционально пятой степени расстояния между ними, что соответствует показателю отталкивания  $\nu = 4$  в потенциале взаимодействия молекул. Как было показано в главе 4 (см. формулы (4.31) и (4.32)), этот случай так называемых *максвелловских молекул* соответствует постоянной частоте столкновений с передачей импульса. Развита позднее строгая кинетическая теория показала, что именно для этого частного случая взаимодействия молекул явление термодиффузии отсутствует.

По сравнению с другими свойствами переноса в газе, которые обусловлены самим фактом столкновений молекул между собой, термодиффузия относится к более тонкой группе явлений, поскольку ее существование обусловлено не столько наличием столкновений, сколько характером зависимости эффективной частоты столкновений от относительной скорости молекул. К сожалению, многочисленные попытки объяснить это явление на элементарном уровне, исходя, в частности, из модели средней длины свободного пробега, представляются мало убедительными. Мы дадим здесь более надежную интерпретацию этого явления на основе *метода баланса импульса*, которым мы уже пользовались при анализе обычной концентрационной диффузии и бародиффузии. Используемый подход близок к методу рассмотрения диффузии и термодиффузии, предложенному Фэрри [32].

Самым существенным в методе баланса импульса является получение необходимого выражения для средней передачи импульса при столкновениях разнородных частиц смеси  $\mathbf{R}_\alpha$  или “диффузионной силы трения”. Ранее при расчете этой величины нами использовалось достаточно простое приближение к функции распределения частиц (4.74). При этом величина  $\mathbf{R}_\alpha$  оказалась пропорциональной разности макроскопических скоростей компонентов. Ниже мы покажем, что явление термодиффузии может быть полностью объяснено, если для вычисления  $\mathbf{R}_\alpha$  использовать более полное приближение к функции распределения компонента  $\alpha$ , добавив в разложение (4.74) наряду с членом, пропорциональным  $\mathbf{c}_\alpha$ , еще один член, пропорциональный  $\mathbf{c}_\alpha c_\alpha^2$ . Общий вид таких разложений подсказывается строгой кинетической теорией, например, разложением функции распределения в ряд по векторным и тензорным полиномам Эрмита в так называемом методе моментов Грэда [33, 18].

Практика показывает, что расчеты заметно упрощаются, если слегка перегруппировать члены в возникающем разложении функции распределения и представить его в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} \left[ 1 + \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha + \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha \left( \gamma_\alpha c_\alpha^2 - \frac{5}{2} \right) \right]. \quad (6.31)$$

Здесь

$$f_{\alpha}^{(0)} = n_{\alpha} \left( \frac{\gamma_{\alpha}}{\pi} \right)^{3/2} \exp[-\gamma_{\alpha} c_{\alpha}^2], \quad \gamma_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{2kT}. \quad (6.32)$$

Упрощение вычислений при таком выборе  $f_{\alpha}$  связано с тем, что полиномы, фигурирующие в разложении (6.31), являются ортогональными друг другу с весовой функцией, соответствующей максвелловскому распределению  $f_{\alpha}^{(0)}$  [18].

Векторные параметры  $\mathbf{a}_{\alpha}$  и  $\mathbf{b}_{\alpha}$  легко выразить через макроскопические параметры компонентов смеси, если использовать определения диффузионной скорости и парциального теплового потоков компонентов плазмы

$$\mathbf{w}_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}} \int \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{c}_{\alpha}, \quad \mathbf{q}_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} \int \mathbf{c}_{\alpha} c_{\alpha}^2 f_{\alpha} d\mathbf{c}_{\alpha} \quad (6.33)$$

и подставить в них разложение (6.31). Неравновесные параметры  $\mathbf{w}_{\alpha}$  и  $\mathbf{q}_{\alpha}$  должны обращаться в нуль при  $f_{\alpha} = f_{\alpha}^{(0)}$ , поэтому уравнения для определения  $\mathbf{a}_{\alpha}$  и  $\mathbf{b}_{\alpha}$  принимают вид

$$\begin{aligned} n_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} &= \int (\mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{c}_{\alpha}) \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} d\mathbf{c}_{\alpha} + \\ &\quad + \int (\mathbf{b}_{\alpha} \cdot \mathbf{c}_{\alpha}) \mathbf{c}_{\alpha} \left( \gamma_{\alpha} c_{\alpha}^2 - \frac{5}{2} \right) f_{\alpha}^{(0)} d\mathbf{c}_{\alpha}, \\ \mathbf{q}_{\alpha} &= \frac{1}{2} m_{\alpha} \int c_{\alpha}^2 (\mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{c}_{\alpha}) \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} d\mathbf{c}_{\alpha} + \\ &\quad + \frac{1}{2} m_{\alpha} \int c_{\alpha}^2 (\mathbf{b}_{\alpha} \cdot \mathbf{c}_{\alpha}) \mathbf{c}_{\alpha} \left( \gamma_{\alpha} c_{\alpha}^2 - \frac{5}{2} \right) f_{\alpha}^{(0)} d\mathbf{c}_{\alpha}. \quad (6.34) \end{aligned}$$

При вычислении возникающих при этом интегралов можно использовать интегральное соотношение, справедливое для произвольного постоянного вектора  $\mathbf{A}$ ,

$$\int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c} F(c) d\mathbf{c} = \frac{1}{3} \mathbf{A} \int F(c) c^2 d\mathbf{c} ,$$

а также представление  $d\mathbf{c}$  в сферической системе координат, которое после интегрирования по углам записывается как  $d\mathbf{c} = 4\pi c^2 dc$ . Для получения необходимых результатов остается вычислить лишь несколько интегралов вида  $\int_0^{\infty} c^r \exp(-\beta c^2) dc$  для

четных значений  $r = 4, 6, 8$ . (см. Приложение 1). Часть интегралов, входящих в выражения (6.34), обращается при этом в нуль, а интересующие нас коэффициенты  $\mathbf{a}_\alpha$  и  $\mathbf{b}_\alpha$  выражаются в результате через  $\mathbf{w}_\alpha$  и  $\mathbf{q}_\alpha$  следующим образом

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{m_\alpha}{kT} \mathbf{w}_\alpha , \quad \mathbf{b}_\alpha = \frac{2}{5} \frac{m_\alpha}{kT} \frac{\mathbf{h}_\alpha}{p_\alpha} , \quad (6.35)$$

где

$$\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha - \frac{5}{2} p_\alpha \mathbf{w}_\alpha . \quad (6.36)$$

Здесь введена векторная величина  $\mathbf{h}_\alpha$ , которая называется *приведенным парциальным тепловым потоком*. Заметим, что суммирование (6.36) по  $\alpha$  приводит к соотношению для полного теплового потока смеси

$$\mathbf{q} = \sum_{\alpha} \mathbf{h}_\alpha + \frac{5}{2} \sum_{\alpha} p_\alpha \mathbf{w}_\alpha . \quad (6.37)$$

Если сравнить это выражение с результатом (3.84) главы 3, то очевидно, что величины  $\mathbf{h}_\alpha$  должны определять ту часть теплового потока, которая связана с градиентом температуры, т.е. обычную теплопроводность в смеси. Более общий анализ, который приводит к выражению (3.85), показывает, что в выражения для  $\mathbf{h}_\alpha$  могут входить также относительно малые члены, пропорциональные диффузионным скоростям компонентов [18].

Обратимся к случаю бинарной смеси газов. Вычисление величины  $\mathbf{R}_1$  с использованием функций распределения компонентов смеси в форме (6.31) производится на основе общего выражения (4.72) главы 4 с переходом к переменным в системе центра масс сталкивающихся частиц. Та часть этой величины, которая связана с коэффициентами  $\mathbf{a}_\alpha$ , была уже фактически вычислена ранее и приводит к результату (6.2). Оставшаяся часть, выражающаяся через коэффициенты  $\mathbf{b}_\alpha$ , может быть рассчитана аналогичным образом. Подробности вычислений приводятся в Приложении 4. Соответствующий результат можно представить в виде

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^D + \mathbf{R}_1^T, \quad (6.38)$$

где  $\mathbf{R}_1^D$  – диффузионная сила трения, определяемая выражением (6.3), а  $\mathbf{R}_1^T$  – так называемая термосила, которая записывается в виде

$$\mathbf{R}_1^T = \frac{n_1 n_2 k T}{n [D_{12}]_1} \mu_{12} \xi_{12} \left( \frac{\mathbf{h}_2}{m_2 p_2} - \frac{\mathbf{h}_1}{m_1 p_1} \right). \quad (6.39)$$

Здесь  $\mu_{12}$  – приведенная масса частиц и

$$\xi_{12} = \left( \frac{6}{5} C_{12}^* - 1 \right), \quad (6.40)$$

где величина  $C_{12}^*$  представляет собой отношение  $\Omega$ -интегралов

$$C_{12}^* = \frac{\Omega_{12}^{(1,2)}}{3\Omega_{12}^{(1,1)}} = \frac{\Omega_{12}^{(1,2)*}}{\Omega_{12}^{(1,1)*}}. \quad (6.41)$$

Строгая кинетическая теория [18] дает явные выражения для парциальных приведенных тепловых потоков  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$ . Как уже отмечалось, основной вклад в них дают члены с градиентом температуры. В этом случае

$$\mathbf{h}_1 = -\kappa_1 \nabla T, \quad \mathbf{h}_2 = -\kappa_2 \nabla T, \quad (6.42)$$

где  $\kappa_\alpha$  – парциальные коэффициенты теплопроводности. Используя полученные результаты, уравнение диффузии в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\frac{n_1 n_2 k T}{n [D_{12}]_1} \left[ (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \mu_{12} \xi_{12} \left( \frac{\kappa_2}{m_2 p_2} - \frac{\kappa_1}{m_1 p_1} \right) \nabla T \right] = -p \mathbf{d}_1. \quad (6.43)$$

Для молярного диффузионного потока приходим к выражению

$$\mathbf{J}_1^m = -n [D_{12}]_1 [\nabla x_1 + k_p \nabla \ln p + k_T \nabla \ln T]. \quad (6.44)$$

Здесь  $k_p$  определено формулами (6.22) – (6.23), а коэффициент термодиффузии  $k_T$  записывается в виде

$$k_T = \alpha_T x_1 x_2, \quad (6.45)$$

где постоянная термодиффузии  $\alpha_T$  определена как

$$\alpha_T = \left( \frac{\mu_{12}}{k} \right) \xi_{12} \frac{1}{n [D_{12}]_1} \left( \frac{\kappa_2}{m_2 x_2} - \frac{\kappa_1}{m_1 x_1} \right). \quad (6.46)$$

Полученное выражение совпадает с результатом строгой теории, получаемом во *втором приближении* метода Чепмена-Энскога [9–11] или метода Грэда [18]. Второе приближение соответствует учету двух полиномов Сонина в разложении (6.32). На самом деле, поскольку коэффициенты  $\mathbf{a}_\alpha$  не дают вклада в термодиффузию, результат (6.46) соответствует *первому исчезающему приближению* теории.

Выражения для парциальных теплопроводностей  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в строгой теории вычисляются независимо и оказываются достаточно сложными [18]. Для приближенных оценок и расчетов можно использовать результаты элементарной кинетической теории теплопроводности смеси, приведенные в параграфе 5.4. Напомним, что парциальные коэффициенты теплопроводности можно определить в этом случае как

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_{11}}{1 + H_{12} \frac{x_2}{x_1}}, \quad \kappa_2 = \frac{\kappa_{22}}{1 + H_{21} \frac{x_1}{x_2}}. \quad (6.47)$$

В модифицированном варианте элементарной теории

$$\kappa_{\alpha\alpha} = \frac{15}{4} \frac{k}{m_\alpha} \eta_{\alpha\varepsilon} \quad , \quad (6.48)$$

а  $H_{\alpha\beta}$  определено выражением (5.46) либо (5.52).

Характер температурной зависимости постоянной термодиффузии  $\alpha_T$  (6.46) определяется в основном коэффициентом  $\xi_{12}$ . (6.40). Используя результаты вычисления  $\Omega$ -интегралов для потенциала взаимодействия частиц, соответствующего обратнo-степенному закону (4.28), можно получить соотношение [9]

$$\xi_{12} = \frac{1}{5} \frac{v_{12} - 4}{v_{12}} \quad , \quad (6.49)$$

где  $v_{12}$  – показатель отталкивания в потенциале взаимодействия. Как видно, при  $v_{12} = 4$  (модель максвелловских молекул) постоянная термодиффузии обращается в нуль. Именно по этой причине явление термодиффузии не было открыто еще во времена Максвелла..

Для модели молекул – твердых сфер ( $v_{12} \rightarrow \infty$ ) имеем  $\xi_{12} = 0,2$ ., для кулоновских взаимодействий заряженных частиц ( $v_{12} = 1$ ) получаем  $\xi_{12} = -0,6$ . Очевидно, что постоянная термодиффузии может быть как положительной, так и отрицательной. В случае реальных потенциалов взаимодействия (например, потенциала Леннарда-Джонса) параметр  $\xi_{12}$  оказывается функцией приведенной температуры  $T^* = kT/\varepsilon$  и может менять знак [31] при некотором значении температуры (*температура инверсии*). На практике это означает, что если величина  $\alpha_T$  положительна, то компонент 1 смеси стремится в более холодную зону, а компонент 2– в более нагретую.

В общем случае постоянная термодиффузии оказывается очень сложной функцией температуры, масс молекул и эффективных сечений столкновений, а также концентрации компонентов [1, 10 24, 31]. При этом зависимость от температуры определяется в основном поведением параметра  $\xi_{12}$ , а главная зависимость от масс и

поперечников рассеяния заключена в выражениях для  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Относительно простые выражения для  $\alpha_T$  можно получить в случае изотопных смесей или смесей с малой относительной разницей масс молекул и эффективных поперечников рассеяния молекул компонентов. В частности для модели молекул - твердых сфер с массами  $m_1$ ,  $m_2$  и диаметрами  $d_1$ ,  $d_2$  расчеты, соответствующие первому неисчезающему приближению строгой теории, в этом специальном случае дают [1,24]

$$[\alpha_T]_{\text{I}} = 0,89 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + 0,39 \frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1} \quad (6.50)$$

Возможность практического использования явления термодиффузии для разделения изотопных и газовых смесей была реализована в так называемых *термодиффузионных колоннах*. В 1938 г. Клузис и Диккель показали, что единичный разделительный эффект, возникающий в длинной вертикальной трубе в радиальном направлении за счет термодиффузии, может быть многократно увеличен за счет тепловых конвективных потоков, направленных вдоль оси трубы. С помощью термодиффузионных колонн было осуществлено разделение большого числа изотопов химических элементов [31].



## ГЛАВА 7. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ

Выше мы определили плазму как *частично или полностью ионизованную газовую смесь*, образованную из произвольного числа сортов заряженных и нейтральных частиц и удовлетворяющую условию *квазинейтральности*. При таком подходе электроны и ионы наряду с атомами (либо молекулами) рассматриваются как отдельные компоненты смеси, на заряженные частицы которых воздействуют электрические и магнитные поля. Помимо особой роли электронов и ионов в явлениях переноса, новым в описании плазмы по сравнению с обычной газовой смесью оказывается как раз учет действия электрических и магнитных полей. Это отражается как в появлении новых членов в уравнениях сохранения для плазмы, так и в усложнении вида соотношений для входящих в них неравновесных потоков. Другая важная особенность связана с так называемой *неизотермичностью* или *многотемпературностью* плазмы. Из-за слабой передачи энергии при столкновении электронов с тяжелыми частицами (ионами и нейтральными атомами) в плазме могут реализовываться состояния, характеризующиеся различными температурами электронов и тяжелых частиц. В общем случае в силу разных причин могут оказаться различными и температуры ионов и атомов. В систему уравнений переноса плазмы необходимо включать поэтому не только уравнения сохранения для плазмы в целом, но и уравнения баланса импульса и энергии для каждого отдельного компонента, в которых учитываются члены, описывающие среднюю передачу импульса и энергии при столкновениях частиц.

В настоящей главе формулируются общие уравнения переноса в плазме и рассматриваются соотношения для диффузионных потоков в плазме в присутствии электрического и магнитного полей.

### **7.1. Общие уравнения переноса для многокомпонентной плазмы**

Уравнение непрерывности (уравнение сохранения числа частиц) для отдельного компонента плазмы имеет тот же вид (3.33), что и в случае обычной газовой смеси,

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = 0 . \quad (7.1)$$

При записи соответствующих уравнений для заряженных частиц в них можно учесть также рождение и исчезновение частиц в результате реакций ионизации и рекомбинации. Для электронного компонента, в частности, имеем (см. также параграф 2.7)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot n_e \mathbf{u}_e = k_f n_e n_a - k_r n_e^2 n_i . \quad (7.2)$$

Умножим уравнение (7.1) на заряд частицы  $\alpha$  сорта  $e_\alpha$  и просуммируем по всем сортам частиц. В результате приходим к записываемому в локальной форме уравнению сохранения заряда в плазме

$$\frac{\partial \rho^e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (7.3)$$

Здесь  $\rho^e = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha$  – плотность объемного заряда плазмы и вводится вектор плотности тока

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha \mathbf{u}_\alpha . \quad (7.4)$$

Величина  $\mathbf{j}$  представляет собой сумму средних потоков заряда частиц, переносимых в единицу времени через единицу поверхности в плазме благодаря существованию скоростей упорядоченного движения этих частиц. Учитывая, что  $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u} + \mathbf{w}_\alpha$ , где  $\mathbf{w}_\alpha$  – диффузионная скорость частиц сорта  $\alpha$ , можно представить (7.4) в виде

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{u} + \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha .$$

Первый член в этом выражении соответствует *конвективному* переносу объемного заряда плазмы, связанному с движением плазмы как целого, второй – так называемому *току проводимости*. Для квазинейтральной плазмы ( $\rho^e = 0$ ) остается лишь один вид тока, и мы имеем дело с величиной, называемой *плотностью тока проводимости*,

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} . \quad (7.5)$$

Из уравнения (7.3) в этом случае следует, что  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ .

Уравнения сохранения импульса и энергии (3.43) и (3.46), полученные ранее для газовой смеси, несколько модифицируются в случае плазмы благодаря учету электромагнитных сил, действующих на электроны и ионы плазмы.

Выражение для силы, действующей на отдельную заряженную частицу, можно определить выражением

$$\mathbf{F}_{\alpha} = eZ_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) + \mathbf{X}_{\alpha} . \quad (7.6)$$

Справа здесь фигурирует *сила Лоренца*, действующая при наличии электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитного поля  $\mathbf{B}$  на частицу, обладающую зарядом  $e_{\alpha} = eZ_{\alpha}$  (для электронов  $Z_e = -1$ , для нейтральных частиц  $Z_{\alpha} = 0$ ). Величина  $\mathbf{X}_{\alpha}$  соответствует силам неэлектромагнитной природы. Для простоты ниже учитывается действие только силы тяжести, так что  $\mathbf{X}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{g}$ .

Введем определение электрического поля  $\mathbf{E}'$ , действующего в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} . \quad (7.7)$$

Второе слагаемое в (7.7) – это индуцированное электрическое поле, возникающее при пересечении потоком плазмы силовых линий магнитного поля.

Соответствующие члены в уравнениях движения и энергии плазмы с учетом определений (7.5) и (7.6) можно представить тогда в виде

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} , \quad \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' . \quad (7.8)$$

При этом величина  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  представляет собой силу (отнесенную к единице объема плазмы), возникающую за счет взаимодействия тока и магнитного поля (сила Ампера), а  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}'$  – выделение энергии в единице объема плазмы при прохождении тока (*джоулево тепло*).

Система уравнений сохранения для плазмы в целом с использованием (7.8) переписывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (7.9)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}, \quad (7.10)$$

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} + p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{u} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}'. \quad (7.11)$$

Уравнения (7.9) – (7.11) должны быть дополнены уравнением состояния газовой смеси (3.55) при включении в число компонентов смеси также электронов и ионов.

Для того чтобы полностью замкнуть приведенную систему уравнений, к ним необходимо добавить еще уравнения Максвелла, описывающие изменения электрического и магнитного полей,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7.12)$$

При записи этих уравнений мы пренебрегаем током смещения, что справедливо при рассмотрении достаточно медленных процессов в плазме. Кроме того, поскольку используется условие квазинейтральности ( $\rho^e = 0$ ), из общей системы уравнений можно исключить

уравнение Пуассона  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho^e$ , в которое явно входит объемный заряд. Фактически это уравнение нужно только для определения отклонения плазмы от квазинейтральности (по найденному из остальных уравнений системы полю  $\mathbf{E}$ ), которое необходимо учитывать либо вблизи границ плазмы (в слое толщиной порядка радиуса Дебая), либо при анализе высокочастотных колебаний плазмы.

Заметим, что новые члены, появившиеся в уравнениях движения и энергии для плазмы по сравнению с уравнениями для газовой смеси, связаны с наличием плотности тока проводимости в плазме. В соответствии с выражением (7.5) плотность тока проводимости  $\mathbf{j}$  определяется относительной диффузией заряженных частиц плазмы. Так, для частично ионизованной плазмы, образованной из

электронов, одного типа ионов и нейтральных частиц, с учетом условия квазинейтральности ( $n_e = n_i Z$ ) имеем

$$\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{w}_e + n_i Z e \mathbf{w}_i = -n_e e (\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i). \quad (7.13)$$

Наиболее простое феноменологическое соотношение для  $\mathbf{j}$  соответствует локальной форме записи закона Ома

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \sigma \mathbf{E}'. \quad (7.14)$$

Ниже мы получим также более общий результат, соответствующий записи так называемого *обобщенного закона Ома*. Более сложными в случае плазмы по сравнению с обычной газовой смесью оказываются также соотношения для тензора вязких напряжений  $\hat{\boldsymbol{\pi}}$  и теплового потока  $\mathbf{Q}$ . Мы обсудим вопрос о виде этих соотношений в главе 8.

Как следует из результатов предыдущей главы, при анализе диффузионных явлений оказывается эффективным метод, основанный на использовании *уравнения движения для отдельного компонента смеси* (6.12). В нашем случае с учетом выражения для  $\mathbf{F}_\alpha$  (7.6) соответствующее уравнение принимает вид

$$\rho_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha^* - n_\alpha \mathbf{X}_\alpha - n_\alpha Z_\alpha e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \mathbf{R}_\alpha. \quad (7.15)$$

Выражение для средней передачи импульса при столкновениях частиц  $\mathbf{R}_\alpha$  уже рассчитывалось и использовалось нами в предыдущих главах. Опуская пока вклады, связанные с учетом термодиффузионных членов (см. параграф 6.3), представим его в виде

$$\mathbf{R}_\alpha = - \sum_{\beta \neq \alpha} n_\alpha \mu_{\alpha\beta} \bar{v}_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta). \quad (7.16)$$

Здесь  $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$  – приведенная масса молекул, а эффективная частота столкновений с передачей импульса  $\bar{v}_{\alpha\beta}$  определена выражением (4.78). Заметим, что выражение для  $\bar{v}_{\alpha\beta}$  записывалось до сих пор для случая, когда температуры компонентов смеси предполагаются одинаковыми. Ниже мы будем применять также более общее определение этой величины, справедливое

для случая различных температур компонентов плазмы (см. следующий параграф).

Использование уравнений (7.15) с правой частью (7.16) соответствует *квазигидродинамическому приближению* или так называемой *двухжидкостной гидродинамике* в теории плазмы [7, 27]. Мы применим их в дальнейшем при анализе процессов диффузии и электропроводности в плазме в присутствии магнитного поля.

Для медленных установившихся течений плазмы можно положить

$d_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} / dt = 0$ . В этом случае, полагая также  $P_{\alpha rs}^* \approx P_{\alpha rs} = p_{\alpha} \delta_{rs}$  (т.е. пренебрегая вкладом вязких напряжений), уравнение (7.15) можно представить в виде уравнения баланса импульса, подобного использованному ранее при анализе диффузии в газовой смеси (см. главу 6)

$$\sum_{\beta \neq \alpha} n_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \bar{v}_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) = -\nabla p_{\alpha} + n_{\alpha} Z_{\alpha} e (\mathbf{E}' + \mathbf{w}_{\alpha} \times \mathbf{B}). \quad (7.17)$$

В более общем случае уравнение (7.15) преобразуется с использованием приближения “равных ускорений” [7,18]. Полагая  $d_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} / dt \approx d\mathbf{u} / dt$ , можно исключить  $d\mathbf{u} / dt$  в уравнении (7.15) с помощью уравнения движения плазмы как целого (7.10). В результате приходим к системе уравнений вида

$$\sum_{\beta \neq \alpha} n_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \bar{v}_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_{\alpha} - \mathbf{w}_{\beta}) = -\left( \nabla p_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \nabla p \right) + n_{\alpha} Z_{\alpha} e (\mathbf{E}' + \mathbf{w}_{\alpha} \times \mathbf{B}) - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}). \quad (7.18)$$

Мы опустили здесь для простоты вклады, связанные с учетом действия сил неэлектромагнитной природы. На самом деле, если эти силы пропорциональны массе частицы (как, например, в случае действия силы тяжести), соответствующие члены автоматически выпадают из уравнений (7.18).

Системы уравнений (7.17) или (7.18) должны быть в общем случае дополнены условием

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0. \quad (7.19)$$

Последнее означает, что из  $N$  диффузионных скоростей ( $N$  – полное число компонентов плазмы) только  $N - 1$  величин являются независимыми.

Как уже отмечалось в главе 3, уравнение баланса энергии смеси получается при суммировании соответствующих уравнений баланса для каждого компонента. Здесь возникает та же проблема, что и с уравнением баланса импульса компонента (7.15), связанная с выбором системы отсчета, в которой определяются макроскопические параметры компонентов (температура, тензор давлений, тепловой поток). Можно показать, что при определении этих параметров относительно системы отсчета, связанной со среднemasсовой скоростью смеси  $\mathbf{u}$ , уравнение баланса энергии для компонента  $\alpha$  в приближении равных ускорений записывается в виде [18]

$$\frac{3}{2} n_{\alpha} k \frac{dT_{\alpha}}{dt} + p_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} + \pi_{\alpha} : \nabla \mathbf{u}_{\alpha} + \nabla \cdot \mathbf{h}_{\alpha} = Q_{\alpha} - \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{R}_{\alpha}, \quad (7.20)$$

где  $\mathbf{h}_{\alpha}$  – приведенный тепловой поток частиц сорта  $\alpha$ , определяемый выражением (6.36).

Здесь для простоты считается что частицы, составляющие плазму, являются бесструктурными, т.е. не обладают внутренними степенями свободы. Величина  $Q_{\alpha}$  представляет собой среднее изменение энергии при столкновениях частиц сорта  $\alpha$  с частицами других сортов. При вычислении этой величины (см. Приложение 3) предполагается, что функция распределения частиц компонента  $\alpha$  имеет форму максвелловского распределения, определяемого при собственной температуре каждого компонента  $T_{\alpha}$ . Полученный результат записывается тогда в виде

$$Q_{\alpha} = - \sum_{\beta} 3n_{\alpha} k \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \bar{v}_{\alpha\beta} (T_{\alpha} - T_{\beta}). \quad (7.21)$$

## 7.2. Эффективные частоты столкновений частиц в плазме

В случае неизотермической плазмы с отличающимися друг от друга температурами компонентов  $T_{\alpha}$  величина средней передачи

импульса при столкновениях частиц  $\mathbf{R}_\alpha$ , как показывают конкретные вычисления (см. Приложение 3), сохраняет тот же вид (7.16), что и в случае однотемпературной плазмы. Несколько модифицируется лишь фигурирующая в выражении для  $\mathbf{R}_\alpha$  эффективная частота столкновений частиц с передачей импульса  $\bar{\nu}_{\alpha\beta}$ , при записи которой вместо параметра  $(\mu_{\alpha\beta}/2kT)$  появляется параметр  $\gamma_{\alpha\beta}$ , определяемый как

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}, \quad \gamma_\alpha = \frac{m_\alpha}{2kT_\alpha}, \quad \gamma_\beta = \frac{m_\beta}{2kT_\beta}. \quad (7.22)$$

Аналогичные соображения относятся и к величине  $\bar{\nu}_{\alpha\beta}$ , фигурирующей в выражении для  $Q_\alpha$  (7.20).

Общее выражение для  $\bar{\nu}_{\alpha\beta}$  при  $T_\alpha \neq T_\beta$  записывается в виде

$$\bar{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{4}{3} n_\beta \langle g_{\alpha\beta} \rangle \langle Q_{\alpha\beta}^{(1)} \rangle, \quad \langle g_{\alpha\beta} \rangle = \left( \frac{4}{\pi \gamma_{\alpha\beta}} \right)^{1/2},$$

$$\langle Q_{\alpha\beta}^{(1)} \rangle = \int_0^\infty x^5 \exp(-x^2) Q_{\alpha\beta}^{(1)}(\gamma_{\alpha\beta}^{-1/2} x) dx. \quad (7.23)$$

В случае одинаковых температур компонентов плазмы выражение (7.23) совпадает с полученным ранее выражением (4.78). В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать случай лишь так называемой *двухтемпературной плазмы*, когда температура электронного компонента  $T_e$  может отличаться от температуры тяжелых частиц (ионов и атомов). Из-за заметного обмена энергией при столкновениях тяжелых частиц температура соответствующих им компонентов быстро выравнивается, поэтому будем считать ее одинаковой и равной  $T$ . На практике чаще встречается ситуация, при которой  $T_e \geq T$ . В этом случае из-за малости отношения  $(m_e/m_k)$  при  $k \neq e$  (индекс  $k$  относится к тяжелым частицам) имеем  $\gamma_e \ll \gamma_k$  и  $\gamma_{ek} \approx \gamma_e = m_e/kT_e$ . Таким образом, эффектив-



ная частота столкновений электронов с тяжелыми частицами будет определяться только температурой электронного компонента плазмы. Выражение для нее принимает вид

$$\bar{v}_{ek} = \frac{4}{3} n_k \langle v_e \rangle \langle Q_{ek}^{(1)} \rangle, \quad \langle Q_{ek}^{(1)} \rangle = \int_0^{\infty} x^5 \exp(-x^2) Q_{ek}^{(1)}(g) dx,$$

$$Q_{ek}^{(1)}(g) = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_{ek}(g, \chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi, \quad (7.24)$$

$$g = \gamma_e^{-1/2} x, \quad \langle v_e \rangle = \left( \frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2}.$$

В литературе по физике плазмы [34,35] часто используется представление  $\bar{v}_{ek}$  в виде

$$\bar{v}_{ek} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{m_e}{2kT_e} \right)^{5/2} \int v_{ek}(v) v^4 \exp\left(-\frac{m_e}{2kT_e} v^2\right) dv. \quad (7.25)$$

Под интегралом в выражении (7.25) фигурирует зависящая от скорости электрона  $v$  частота столкновений с передачей импульса

$$v_{ek}(v) = n_k v Q_{ek}^{(1)}(v) = 2\pi n_k \int_0^{\pi} v \sigma_{ek}(v, \chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi. \quad (7.26)$$

Поскольку модуль относительной скорости частиц в этом случае практически совпадает с модулем скорости электрона  $v$ , легко убедиться, что представление (7.25) ничем не отличается от выражения для  $\bar{v}_{ek}$ , даваемого формулой (7.24).

Для атом-атомных и ион-атомных взаимодействий, предполагая температуры соответствующих компонентов одинаковыми и равными  $T$ , можно использовать обычное соотношение (4.78) для  $\bar{v}_{\alpha\beta}$

$$\bar{v}_{\alpha\beta} = \frac{4}{3} n_{\beta} \langle g_{\alpha\beta} \rangle \langle Q_{\alpha\beta}^{(1)} \rangle, \quad \langle g_{\alpha\beta} \rangle = \left( \frac{8kT}{\pi\mu_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \quad (7.27)$$

либо выразить эту величину через  $\Omega$ -интегралы

$$\bar{v}_{\alpha\beta} = \frac{16}{3} n_{\beta} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)}, \quad (7.28)$$

где

$$\Omega_{12}^{(1,1)} = \left( \frac{kT}{2\pi\mu_{12}} \right)^{1/2} \pi \sigma_{12}^2 \Omega_{12}^{(1,1)*}. \quad (7.29)$$

Можно также представить  $\bar{v}_{\alpha\beta}$  с помощью коэффициента бинарной диффузии  $[D_{\alpha\beta}]_1$

$$\bar{v}_{\alpha\beta} = \frac{n_{\beta} kT}{\mu_{\alpha\beta} n [D_{\alpha\beta}]_1}. \quad (7.30)$$

Обсудим теперь вопрос об эффективных частотах столкновений *заряженных частиц* в плазме. При их определении можно воспользоваться результатом вычисления диффузионного сечения рассеяния  $\bar{Q}_{12}^{(1)}(g)$  для кулоновских столкновений частиц, полученным в главе 4. Для взаимодействия заряженных частиц  $\alpha$  и  $\beta$  сорта имеем

$$\bar{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}(g) = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda_{\alpha\beta}, \quad b_0 = \frac{|Z_{\alpha} Z_{\beta}| e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu_{\alpha\beta} g^2}. \quad (7.31)$$

Подставляя это выражение в (7.22), после простых вычислений находим

$$\bar{v}_{\alpha\beta} = \frac{16\pi^{1/2}}{3} n_{\beta} (\gamma_{\alpha\beta})^{3/2} \left( \frac{Z_{\alpha} Z_{\beta} e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu_{\alpha\beta}} \right)^2 \ln \Lambda_{\alpha\beta}. \quad (7.32)$$

Здесь  $\ln \Lambda_{\alpha\beta}$  – кулоновский логарифм, величина  $\Lambda_{\alpha\beta}$  определяется при этом как

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{12\pi\epsilon_0 \mu_{\alpha\beta}}{|e_{\alpha} e_{\beta}| \gamma_{\alpha\beta}} r_D, \quad r_D^{-2} = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{\epsilon_0 kT_{\alpha}}. \quad (7.33)$$

Для эффективной частоты взаимодействия электронов с ионами заряда  $Ze$  в двухтемпературной плазме с  $T_e \neq T_i$  при выполнении условия  $\gamma_e \ll \gamma_i$  или  $m_e T_i / m_i T_e \ll 1$  имеем

$$\bar{v}_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \left( \frac{m_e}{kT_e} \right)^{3/2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 n_i \ln \Lambda_{ei}, \quad (7.34)$$

где

$$\Lambda_{ei} = 3kT \left( \frac{4\pi\epsilon_0}{Ze^2} \right) r_D, \quad r_D = \left( \frac{\epsilon_0 kT_e T_i}{n_e e^2 (T_i + ZT_e)} \right)^{1/2}. \quad (7.35)$$

Сравнивая выражение (7.34) с определением (7.24), легко обнаружить, что роль среднего эффективного сечения электрон-ионных столкновений выполняет величина

$$\langle Q_{ei}^{(1)} \rangle = \frac{\pi}{2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(kT_e)^2} \ln \Lambda_{ei}, \quad (7.36)$$

которая в отличие от обычных электрон-нейтральных сечений достаточно резко меняется с температурой ( $\sim T_e^{-2}$ ).

Параметр  $\bar{v}_{ei}$  играет основную роль при описании явлений диффузии и электропроводности полностью ионизованной плазмы. При анализе явлений теплопроводности и вязкости оказываются важными также характерные частоты электрон-электронных и ион-ионных взаимодействий. Из-за слабой зависимости от величины  $Z$  под знаком логарифма можно приближенно положить  $\ln \Lambda_{ee} \approx \ln \Lambda_{ei}$ . В этом случае из общего выражения (7.32) следует

$$\bar{v}_{ee} = \sqrt{2} Z^{-1} \bar{v}_{ei}. \quad (7.37)$$

Для эффективной частоты ион-ионных столкновений имеем

$$\bar{v}_{ii} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \left( \frac{m_i}{kT_i} \right)^{3/2} \left( \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m_i} \right)^2 n_i \ln \Lambda_{ii}. \quad (7.38)$$

Легко заметить, что

$$\bar{v}_{ii} \approx Z^2 \left( \frac{2m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \bar{v}_{ei} .$$

(Приближенная связь между  $\bar{v}_{ii}$  и  $\bar{v}_{ei}$  соответствует предположению  $\ln \Lambda_{ii} \approx \ln \Lambda_{ei}$ ).

Для неизотермической плазмы оказывается существенной еще одна эффективная частота столкновений  $\bar{v}_{\alpha\beta}^E$ , характеризующая среднюю скорость обмена энергией между компонентами плазмы, имеющими разные температуры. Рассмотрим для простоты случай пространственно однородной плазмы, когда уравнение баланса энергии для компонента  $\alpha$  (7.19) можно записать в виде уравнения релаксации температур

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = - \sum_{\beta} \bar{v}_{\alpha\beta}^E (T_\alpha - T_\beta) , \quad (7.39)$$

где

$$\bar{v}_{\alpha\beta}^E = \frac{2\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta} \bar{v}_{\alpha\beta} . \quad (7.40)$$

Обратная величина  $\tau_{\alpha\beta}^E = 1/\bar{v}_{\alpha\beta}^E$  соответствует, очевидно, характерному времени релаксации температур компонентов к общей для плазмы равновесной температуре. Средняя частота столкновений, характеризующая передачу энергии при взаимодействии электронов и ионов в плазме, определяется в этом случае как

$$\bar{v}_{ei}^E = \frac{2m_e}{m_i} \bar{v}_{ei} . \quad (7.41)$$

Соответствующее характерное время релаксации температур электронов и ионов оказывается в  $(m_i/2m_e)$  больше, чем время релаксации импульса  $\tau_{ei} = 1/\bar{v}_{ei}$ . Для плазмы водорода, например, отношение этих времен составляет три порядка величины.

Иерархия характерных частот столкновений в полностью ионизованной плазме выстраивается в результате таким образом

$$\bar{v}_{ee} \sim \bar{v}_{ei} \gg \bar{v}_{ii} \gg \bar{v}_{ei}^E . \quad (7.42)$$

Иерархию обратных величин, т.е. соответствующих времен между столкновениями частиц, можно представить тогда в виде

$$\tau_{ei}^E \gg \tau_{ii} \gg \tau_{ei} \sim \tau_{ee} . \quad (7.43)$$

Как видно, время релаксации температур компонентов оказывается самым большим из всех времен. Именно это обстоятельство позволяет вводить в рассмотрение различные температуры электронов и ионов и, если характерное время обмена энергией превышает характерное макроскопическое время задачи, считать это различие приближенно постоянным во времени. Отрыв температуры электронов от температуры остальных компонентов плазмы может поддерживаться также протеканием тока в плазме (точнее, связанным с этим током выделением джоулева тепла), а также другими причинами, зависящими в каждом случае от конкретной ситуации.

### 7.3. Обобщенный закон Ома

Уравнения (7.15) или следующие из них уравнения (7.17) можно использовать для вывода обобщенного закона Ома в плазме, связывающего плотность тока проводимости  $\mathbf{j}$  со значениями электрического и магнитного полей, а также градиентами парциальных давлений частиц в плазме. Ниже мы рассмотрим вывод этого закона для случая трехкомпонентной частично ионизованной плазмы.

Пусть индексы  $e, i, n$  соответствуют электронам, ионам и нейтральным частицам (атомам или молекулам), заряды электронов и ионов равны  $e_e = -e$  и  $e_i = Ze$  соответственно. Будем полагать также массы ионов и нейтралов одинаковыми ( $m_i = m_n = m$ ). Воспользуемся уравнениями (7.18). Уравнение для электронной компоненты ( $\alpha = e$ ) может быть упрощено благодаря наличию малого параметра  $\delta = m_e/m$ , при этом можно, в частности, опустить члены пропорциональные  $\rho_e/\rho$ . В результате

$$n_e m_e \left[ \bar{v}_{ei} (\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i) + \bar{v}_{en} (\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_n) \right] = -n_e e \mathbf{E}^* - n_e m_e \omega_e (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k}) , \quad (7.44)$$

где величина

$$\omega_e = \frac{e}{m_e} |\mathbf{B}| \quad (7.45)$$

имеет смысл *циклотронной* или *ларморовской частоты* для электронов,  $\mathbf{k} = \mathbf{B}/B$ , а поле  $\mathbf{E}^*$  определено выражением

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}' + \frac{1}{n_e e} \nabla p_e \quad (7.46)$$

Введем новые переменные  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i$  и  $\mathbf{s} = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_n$ . Величину  $\mathbf{s}$  называют иногда *скоростью проскальзывания* ионов. Уравнение (7.44) переписывается тогда в виде

$$n_e m_e [\mathbf{v}_0 \mathbf{w} + \bar{\mathbf{v}}_{en} \mathbf{s}] = -n_e e \mathbf{E}^* - n_e m_e \omega_e (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k}), \quad (7.47)$$

где  $\mathbf{v}_0$  определено как

$$\mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}}_{ei} + \bar{\mathbf{v}}_{en} \quad (7.48)$$

Введем определение степени ионизации плазмы  $\alpha = n_i / (n_i + n_a)$ . Нетрудно показать, что с учетом условия (7.19) для диффузионных скоростей и в пренебрежении малыми членами порядка  $\delta = m_e/m$ , имеет место соотношение

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w} + (1 - \alpha) \mathbf{s} \quad (7.49)$$

В результате для определения плотности тока  $\mathbf{j} = -ne\mathbf{w}$  помимо уравнения (7.47) необходимо лишь одно соотношение, связывающее скорость проскальзывания ионов  $\mathbf{s}$  и величину  $\mathbf{w}$ . Используем для этого уравнение (7.18), записанное для нейтральной компоненты ( $\alpha = n$ ). Учитывая, что  $\rho_n/\rho \approx 1 - \alpha$ , можно представить это уравнение в виде

$$\begin{aligned} -n_e m_e \bar{\mathbf{v}}_{en} \mathbf{w} - \left( \frac{n_i m_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{in} + n_e m_e \bar{\mathbf{v}}_{en} \right) \mathbf{s} = & -[\nabla p_n - (1 - \alpha) \nabla p] + \\ & + (1 - \alpha) n_e m_e \omega_e (\mathbf{w} \times \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Выражая отсюда  $\mathbf{s}$ , находим

$$\mathbf{s} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} [\mathbf{w} + (1-\alpha)\omega_e \tau_{en} (\mathbf{w}_e \times \mathbf{k})] + \frac{2\tau_{in}}{n_i m (1+\varepsilon)} \mathbf{P}, \quad (7.50)$$

где  $\tau_{en} = \bar{v}_{en}^{-1}$ ,  $\tau_{in} = \bar{v}_{in}^{-1}$  и  $\mathbf{P} = \alpha \nabla p - \nabla(p_e + p_i)$ . Параметр  $\varepsilon$  определяется при этом как

$$\varepsilon = \frac{2n_e m_e \bar{v}_{en}}{n_i m_i \bar{v}_{in}} \sim \left( \frac{m_e T_e}{m_i T} \right)^{1/2} \frac{\langle Q_{en}^{(1)}(T_e) \rangle}{\langle Q_{in}^{(1)}(T) \rangle} \ll 1. \quad (7.51)$$

Примерная оценка отношений эффективных сечений электрон-атомных и ион-атомных столкновений для различных газов дает величину, заключенную в пределах (0.1–10). Учитывая малость отношения  $m_e/m_i$ , получаем, что при  $T_e \sim T_i$  параметр  $\varepsilon$  также оказывается малым.

Рассмотрим сначала случай, когда магнитное поле отсутствует. Уравнения (7.47) и (7.50) принимают при этом вид

$$n_e m_e [\nu_0 \mathbf{w} + \bar{v}_{en} \mathbf{s}] = -n_e e \mathbf{E}^*, \quad \mathbf{s} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \mathbf{w} + \frac{2\tau_{in}}{n_i m (1+\varepsilon)} \mathbf{P}.$$

Подставляя значение  $\mathbf{s}$  в первое уравнение, замечаем, что в полученном выражении можно пренебречь членами, пропорциональными малой величине  $\varepsilon$ . При этом член, пропорциональный  $\mathbf{P}$ , оказывается малым по сравнению с членом пропорциональным  $\nabla p_e$ , входящим в  $\mathbf{E}^*$ . В результате получаем уравнение

$$n_e m_e \nu_0 \mathbf{w} = -n_e e \mathbf{E}^*,$$

из которого с учетом определения  $\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{w}$  следует

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^* = \sigma \left( \mathbf{E}' + \frac{1}{n_e e} \nabla p_e \right). \quad (7.52)$$

Коэффициент электропроводности  $\sigma$  записывается при этом как

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_0} = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_0, \quad (7.53)$$

где  $\nu_0$  определяется выражением (7.48). При конкретных расчетах этой величины можно использовать выражения (7.24) и (7.34) для

эффективных частот электрон-нейтральных и электрон-ионных столкновений.

Заметим, что в отсутствие градиента электронного давления выражение (7.52) соответствует обычной локальной форме записи феноменологического закона Ома (7.14). Подчеркнем, что полученные результаты соответствуют по точности первому приближению Чепмена-Каулинга. Учет следующих приближений несколько корректирует численные коэффициенты в этих выражениях. Особенно существенным это оказывается в случае полностью ионизованной плазмы, где численный коэффициент возрастает почти в два раза. Более детально мы обсудим результаты строгой теории в следующей главе.

Рассмотрим теперь уравнения (7.47) и (7.50) в случае, когда учитывается присутствие магнитного поля. Опуская дающие малый вклад члены, пропорциональные величине  $\mathbf{P}$ , и подставляя  $\mathbf{s}$  в (7.47), замечаем, что в полученном выражении можно пренебречь членами, пропорциональными малой величине  $\varepsilon$ , только там, где они не умножаются на циклотронную частоту  $\omega_e$ , которая может принимать произвольные значения. В результате приходим к следующему выражению для обобщенного закона Ома

$$\sigma \mathbf{E}^* = \mathbf{j} + \beta_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + s [ \mathbf{k} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) ] , \quad (7.54)$$

где  $\sigma$  соответствует электропроводности плазмы в отсутствие магнитного поля (7.53). Величина  $\beta_0 = \omega_e \tau_0$  называется *параметром Холла* для электронов, а параметр  $s$  равен

$$s = (1 - \alpha)^2 \beta_0 \beta_i = \delta_0 \beta_0^2 \quad (7.55)$$

и носит название *коэффициента проскальзывания ионов* относительно нейтралов. При этом  $\beta_i = \omega_i \tau_{in}$  – параметр Холла для ионов, где

$$\omega_i = \frac{Ze}{\mu_{in}} |\mathbf{B}| . \quad (7.56)$$

Проекцию уравнения (7.54) на направление магнитного поля получаем, образуя скалярное произведение его левой и правой частей с вектором  $\mathbf{k}$ . В результате для параллельной составляющей плотности тока имеем



$$\mathbf{j}_{\parallel} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}^* , \quad \sigma_{\parallel} = \sigma_0 , \quad (7.57)$$

где  $\mathbf{E}_{\parallel}^* = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{k})$ . Таким образом, *плотность тока вдоль направления магнитного поля определяется тем же значением электропроводности  $\sigma$ , что и в отсутствие магнитного поля.*

Полная плотность тока определяется как  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}$ , где

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) , \quad \mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{j} - \mathbf{j}_{\parallel} = \mathbf{k} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) . \quad (7.58)$$

Решение уравнения (7.54) для составляющих плотности тока, перпендикулярных магнитному полю, можно найти в результате следующих простых операций. Образует векторное произведение уравнения (7.54) с вектором  $\mathbf{k}$ . В результате имеем

$$\sigma(\mathbf{E}^* \times \mathbf{k}) = (1+s)(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - \beta_0 \mathbf{j}_{\perp} .$$

Выражая отсюда  $(\mathbf{j} \times \mathbf{k})$  и подставляя его в исходное уравнение (7.57), находим

$$\sigma(\mathbf{E}_{\parallel}^* + \mathbf{E}_{\perp}^*) = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp} + \frac{\beta_0^2}{1+s} \mathbf{j}_{\perp} + \frac{\sigma \beta_0}{1+s} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{k}) + s \mathbf{j}_{\perp} .$$

Если исключить из этого уравнения соотношение для продольных величин (7.57), то для  $\mathbf{j}_{\perp}$  получаем

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\sigma(1+s)}{(1+s)^2 + \beta_0^2} \mathbf{E}_{\perp}^* + \frac{\sigma \beta_0}{(1+s)^2 + \beta_0^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*) , \quad (7.59)$$

где  $\mathbf{E}_{\perp}^* = [\mathbf{k} \times (\mathbf{E}^* \times \mathbf{k})]$ .

Окончательное выражение для плотности тока проводимости в плазме  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}$  можно представить тогда в виде

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \sigma_H (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*) . \quad (7.60)$$

Здесь  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_H$  – продольная, поперечная и холловская электропроводности плазмы, определяемые соответственно выражениями

$$\sigma_{\parallel} = \sigma, \quad \sigma_{\perp} = \sigma \frac{1+s}{(1+s)^2 + \beta_0^2}, \quad \sigma_H = \sigma \frac{\beta_0}{(1+s)^2 + \beta_0^2} \quad (7.61)$$

В полностью ионизованной плазме  $\delta_0 = 0$  и  $\tau_0 = \tau_{ei}$ . В этом случае

$$\sigma_{\parallel} = \sigma = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_{ei}, \quad \sigma_{\perp} = \sigma \frac{1}{1 + \omega_e^2 \tau_{ei}^2}, \quad \sigma_H = \sigma \frac{\omega_e \tau_{ei}}{1 + \omega_e^2 \tau_{ei}^2}. \quad (7.62)$$

Из полученных выше выражений следует, что магнитное поле не влияет на электропроводность плазмы вдоль силовых линий магнитного поля. Если электронный параметр Холла мал ( $\beta_0 \ll 1$ ), то магнитное поле почти не влияет на токи поперек магнитного поля.

Однако при  $\beta_0 \geq 1$  это влияние оказывается заметным. При этом магнитное поле может заметно ослаблять ток в направлении поперечной компоненты электрического поля  $\mathbf{E}^*$ , а также создавать ток Холла в направлении, перпендикулярном как электрическому, так и магнитному полю. Заметим, что для частично ионизованной плазмы, удовлетворяющей условию  $\tau_{en}^{-1} \geq \tau_{ei}^{-1}$ , имеем

$$\delta = (1-\alpha)^2 \frac{\beta_0}{\beta_i} \sim \varepsilon \ll 1, \quad (7.63)$$

поэтому влияние параметра проскальзывания ионов  $s = \delta_0 \beta_0^2$  начинает сказываться на значениях  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_H$  гораздо позднее, чем влияние параметра Холла для электронов, а для полностью ионизованной плазмы эффект проскальзывания вообще отсутствует. В последнем случае при  $\omega_e \tau_{ei} \gg 1$  получаем

$$\sigma_{\perp} = \frac{\sigma}{\omega_e^2 \tau_{ei}^2}, \quad \sigma_H = \frac{\sigma}{\omega_e \tau_{ei}}. \quad (7.64)$$

#### 7.4. Диффузия в слабоионизованном газе

Рассмотрим слабо ионизованный газ, образованный из электронов, ионов и нейтральных атомов одного сорта. Напомним, что условие слабой ионизации определяется как

$$\bar{v}_{ei} \ll \bar{v}_{en} . \quad (7.65)$$

Поскольку при этом  $\alpha \ll 1$ , по отношению к независимой диффузии заряженных частиц нейтральный компонент выступает как среда, скорость которой  $\mathbf{u}_n$  фактически совпадает со среднемассовой или среднемолярной скоростью смеси. Молярные диффузионные потоки заряженных частиц определены при этом как

$$\mathbf{J}_\alpha^m = n_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_n), \quad \alpha = e, i . \quad (7.66)$$

Рассмотрим вначале случай, когда магнитное поле отсутствует, а электрическое поле действует в направлении оси  $X$ . Будем полагать, что в том же направлении изменяются плотности заряженных компонентов. Тогда уравнения (7.17) для электронного и ионного компонента запишутся в виде

$$\begin{aligned} n_e m_e \bar{v}_{en} (u_e - u_n) &= -n_e e E - \frac{dp_e}{dx} , \\ n_i \mu_{in} \bar{v}_{in} (u_i - u_n) &= n_i Z e E - \frac{dp_i}{dx} . \end{aligned} \quad (7.67)$$

Для молярных диффузионных потоков отсюда получаем

$$\begin{aligned} J_e^m &= -D_e \frac{dn_e}{dx} - \mu_e n_e E , \\ J_i^m &= -D_i \frac{dn_i}{dx} + Z \mu_i n_i E , \end{aligned} \quad (7.68)$$

где использованы соотношения  $p_e = n_e kT$ ,  $p_i = n_i kT$ .

Коэффициенты диффузии электронов и ионов определены как

$$D_e = \frac{kT_e}{m_e \bar{v}_{en}} , \quad D_i = \frac{kT_i}{\mu_{in} \bar{v}_{in}} . \quad (7.69)$$

При этом коэффициенты подвижности  $\mu_\alpha$  и диффузии  $D_\alpha$  связаны соотношением Эйнштейна

$$\mu_\alpha = \frac{e}{kT_\alpha} D_\alpha . \quad (7.70)$$

Заметим, что в соответствии с оценкой (7.51)

$$D_e \gg D_i , \quad \mu_e \gg \mu_i , \quad (7.71)$$

поэтому скорость диффузии электронов намного превышает скорость диффузии ионов.

Полученные выше выражения легко обобщить и на случай диффузии заряженных частиц поперек магнитного поля. Уравнения (7.17) для электронного и ионного компонента в рассматриваемом нами случае слабо ионизованной плазмы принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e^m + \beta_e (\mathbf{J}_e^m \times \mathbf{k}) &= -D_e \nabla n_e - \mu_e n_e \mathbf{E} , \\ \mathbf{J}_i^m + \beta_i (\mathbf{J}_i^m \times \mathbf{k}) &= -D_i \nabla n_i + Z_i \mu_i n_i \mathbf{E} , \end{aligned} \quad (7.72)$$

где  $\beta_e = \omega_e \tau_{en}$  и  $\beta_i = \omega_i \tau_{in}$ . Рассмотрим в качестве примера цилиндрический столб плазмы, помещенный в продольное (направленное по оси цилиндра) магнитное поле. Предположим, что электрическое поле и все градиенты направлены лишь в радиальном направлении. Тогда из решения уравнений (7.72) для радиальных потоков поперек магнитного поля получаем

$$\begin{aligned} J_{e\perp}^m &= -D_{e\perp} \frac{dn_e}{dr} - \mu_{e\perp} n_e E_r , \\ J_{i\perp}^m &= -D_{i\perp} \frac{dn_i}{dx} + Z \mu_{i\perp} n_i E_r , \end{aligned} \quad (7.73)$$

где

$$D_{\alpha\perp} = \frac{kT_\alpha}{e} b_{\alpha\perp} = \frac{D_\alpha}{1 + \beta_\alpha^2} , \quad (\alpha = e, i) . \quad (7.74)$$

Заметим, что в сильном магнитном поле, когда  $\beta_\alpha^2 \gg 1$ , имеют место неравенства

$$D_{e\perp} \ll D_{i\perp} , \quad \mu_{e\perp} \ll \mu_{i\perp} , \quad (7.75)$$

т.е. условия, обратные условиям (7.71). Это означает, что скорость радиальной диффузии ионов поперек магнитного поля может зна-

чительно превышать скорость радиальной диффузии электронов. Мы оставляем здесь в стороне анализ холловских диффузионных потоков, перпендикулярных как электрическому, так и магнитному полям.

Рассмотрим теперь вопрос о так называемой *амбиполярной диффузии* в слабоионизованной плазме. Пусть магнитное поле отсутствует. При диффузии заряженных частиц в поле градиентов их собственного парциального давления из-за высокой подвижности электронов по сравнению с ионами может возникать разделение зарядов. Возникающее при этом электрическое поле (поле объемного заряда) начинает препятствовать диффузии электронов и, наоборот, способствовать диффузии ионов. Это поле должно расти до тех пор, пока не станут одинаковыми диффузионные потоки электронов и ионов, что соответствует установлению квазистационарного состояния. Совместная диффузия электронов и ионов носит название амбиполярной диффузии.

В качестве конкретного примера рассмотрим радиальную диффузию заряженных частиц в длинной цилиндрической трубе в условиях, когда на ее стенках происходит интенсивная рекомбинация частиц, благодаря чему возникают радиальные градиенты плотности заряженных частиц. Пусть в начальный момент времени квазинейтральность плазмы точно осуществляется во всем объеме. В отсутствие внешнего электрического поля из-за большого различия в коэффициентах диффузии электронов и ионов (см. условие (7.71)) вблизи стенок будет нарастать объемный отрицательный заряд и возникнет радиальное электрическое поле объемного заряда. В соответствии с соотношениями (7.68) это поле, так же, как и градиенты плотности заряженных частиц, будет воздействовать на их диффузию. Квазистационарное состояние наступает, когда диффузионные потоки сравниваются по своей величине, что соответствует отсутствию электрического тока в плазме. (Последнее возможно, например, при отсутствии контакта плазмы с внешними проводниками). Действительно, из определения тока проводимости в плазме при выполнении условия  $n_e = Zn_i$  получаем

$$j = -e(J_e^m - J_i^m). \quad (7.76)$$

Условие  $j = 0$  можно использовать для того, чтобы найти величину напряженности электрического поля, возникающего в плазме в квазистационарном состоянии. Приравнявая выражения для  $J_e^m$  и  $J_i^m$  (7.68) и полагая  $dn_e/dr = Zdn_i/dr$ , находим

$$n_e E_r = \frac{D_i - ZD_e}{\mu_e + \mu_i} \frac{dn_i}{dr} \quad (7.77)$$

(Мы заменили здесь координату  $x$  радиальной координатой  $r$ ). Подставляя поле  $E_r$  (7.77) в выражение для диффузионного потока ионов (7.68), находим

$$J_i^m = J_e^m = -D_A \frac{dn_i}{dr}, \quad (7.78)$$

где

$$D_A = \frac{\mu_e D_i + Z\mu_i D_e}{\mu_e + \mu_i} = D_i \frac{\mu_e}{\mu_e + \mu_i} \left( 1 + Z \frac{T_e}{T_i} \right). \quad (7.79)$$

Коэффициент  $D_A$  носит название *коэффициента амбиполярной диффузии*. При выполнении условий (7.71) получаем

$$D_A = D_i \left( 1 + Z \frac{T_e}{T_i} \right). \quad (7.80)$$

Если  $T_e = T$  и  $Z = 1$ , имеем  $D_A = 2D_i$ , т. е. коэффициент амбиполярной диффузии всего лишь *в два раза больше коэффициента диффузии ионов*, но значительно меньше коэффициента свободной (униполярной) диффузии электронов. Таким образом, амбиполярное электрическое поле существенно уменьшает направленную скорость электронов.

При наличии продольного магнитного поля в результате аналогичных преобразований вместо соотношений (7.78) получаем соотношения для радиальных диффузионных потоков поперек магнитного поля в виде

$$J_{i\perp}^m = J_{e\perp}^m = -D_{A\perp} \frac{dn_i}{dr}, \quad (7.81)$$

где  $D_{A\perp}$  получается из (7.79) заменой коэффициентов  $D_\alpha$  и  $\mu_\alpha$  на соответствующие поперечные коэффициенты  $D_{\alpha\perp}$  и  $\mu_{\alpha\perp}$ . В сильном магнитном поле при выполнении условий (7.75) имеем

$$D_{A\perp} = D_{e\perp} \left( 1 + \frac{T_i}{ZT_e} \right). \quad (7.82)$$

При  $T_e = T$  и  $Z = 1$  получаем, что коэффициент амбиполярной диффузии поперек сильного магнитного поля равен удвоенному коэффициенту поперечной диффузии для электронов

$$D_{A\perp} = 2D_{e\perp} = \frac{2D_e}{\beta_e^2}. \quad (7.83)$$

При наличии градиента температуры в плазме в выражениях для диффузионных потоков в общем случае необходимо учитывать термодиффузионные члены. Анализ показывает, что для диффузионного потока электронов вклад термодиффузии связан с учетом лишь парциального приведенного потока электронов  $\mathbf{h}_e^T$ , а в уравнениях диффузионных потоков для ионов и нейтралов фигурируют лишь парциальные тепловые потоки  $\mathbf{h}_i^T$  и  $\mathbf{h}_n^T$ . При учете термодиффузии следует иметь в виду, что в исходных уравнениях (7.17), на основе которых получаются соотношения для потоков (7.68), фигурируют градиенты парциального давления компонентов. С учетом соотношения  $p_\alpha = n_\alpha kT_\alpha$  эти градиенты можно представить как

$$\frac{dp_\alpha}{dx} = k \left( T_\alpha \frac{dn_\alpha}{dx} + n_\alpha \frac{dT_\alpha}{dx} \right).$$

В результате молярные диффузионные потоки электронов и ионов в слабо ионизованном газе запишутся в виде

$$\begin{aligned} J_e^m &= -D_e \frac{dn_e}{dx} - \mu_e n_e E - n_e D_e \left( 1 + \alpha_T^e \right) \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx}, \\ J_i^m &= -D_i \frac{dn_i}{dx} + Z\mu_i n_i E - n_i D_i \left( 1 + \alpha_T^i \right) \frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{dx}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Постоянные термодиффузии  $\alpha_T^e$  и  $\alpha_T^i$  в этом случае, как правило, заметно меньше единицы, а для некоторых потенциалов взаимодействия частиц могут вообще обращаться в нуль. Выражения для  $\alpha_T^i$  могут рассчитываться по известным формулам для бинарной смеси газов, компонентами которой служат ионы и атомы. Выражения для постоянной термодиффузии электронов  $\alpha_T^e$  будут обсуждаться в следующей главе.



## ГЛАВА 8. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

В настоящей главе мы применим методы вычисления коэффициентов переноса, использованные ранее для газовых смесей, для того чтобы оценить их значения в частично ионизованном газе. При этом для вязкости и теплопроводности плазмы вполне удовлетворительные результаты могут быть получены на основе метода, использующего концепцию средней длины свободного пробега частиц. Для определения электропроводности и вклада термодиффузии в плотность тока проводимости и тепловые потоки в плазме достаточно эффективным оказывается подход, основанный на использовании метода баланса импульса. Разумеется, существенное упрощение подходов дает в ряде случаев лишь качественное описание рассматриваемых явлений, поэтому там, где это оказывается возможным, наряду с приближенными приводятся точные результаты кинетической теории.

### 8.1. Электропроводность частично ионизованного газа

Согласно результатам предыдущей главы, плотность тока проводимости в плазме в отсутствие магнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^* = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{n_e e} \nabla p_e \right), \quad (8.1)$$

где  $\sigma$  – коэффициент электропроводности плазмы

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_0} = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_0. \quad (8.2)$$

Средняя эффективная частота столкновений с передачей импульса представляет собой сумму соответствующих частот электрон-нейтральных и электрон-ионных столкновений

$$\nu_0 = \bar{\nu}_{ei} + \bar{\nu}_{en}. \quad (8.3)$$

По точности вычислений этот результат соответствует первому приближению Чепмена-Каулинга.

Общее выражение для эффективной частоты  $\bar{\nu}_{ek}$  имеет вид

$$\bar{v}_{ek} = \frac{4}{3} n_k \langle v_e \rangle \langle Q_{ek}^{(1)} \rangle, \quad \langle v_e \rangle = \left( \frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2}. \quad (8.4)$$

Среднее эффективное сечение столкновений  $\langle Q_{ek}^{(1)} \rangle$  определяется при этом выражением (7.24). Конкретный расчет его требует знания дифференциального сечения рассеяния электрона на тяжелой частице либо проинтегрированного по углам рассеяния эффективного сечения столкновений с передачей импульса  $Q_{ek}^{(1)}(v)$ . Для электрон-нейтральных столкновений из эксперимента определяется обычно зависящая от скорости (или энергии) электрона эффективная частота столкновений с передачей импульса  $\nu_{ek}(v) = \nu Q_{ek}^{(1)}(v)$ . В этом случае для определения  $\bar{v}_{ek}$  можно воспользоваться выражением (7.25).

Для электрон-ионных столкновений  $\bar{v}_{ei}$  и  $\langle Q_{ei}^{(1)} \rangle$  могут быть рассчитаны до конца и определяются выражениями (см. формулы (7.34) и (7.36))

$$\bar{v}_{ei} = \frac{4}{3} n_i \langle v_e \rangle \langle Q_{ei}^{(1)} \rangle, \quad \langle Q_{ei}^{(1)} \rangle = \frac{\pi}{2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(kT_e)^2} \ln \Lambda. \quad (8.5)$$

В единицах СИ имеем

$$\bar{v}_{ei} = 3,64 \cdot 10^{-6} n_i \frac{\ln \Lambda}{T_e^{3/2}} \text{ с}^{-1}, \quad \langle Q_{ei}^{(1)} \rangle = 5,85 \cdot 10^{-10} \frac{\ln \Lambda}{T_e^2} \text{ м}^2,$$

$$\Lambda = 1,24 \cdot 10^7 \left( \frac{T_e^3}{n_e} \right)^{1/2}. \quad (8.6)$$

Для слабо ионизованного газа можно пренебречь электрон-ионным взаимодействием по сравнению с взаимодействием электронов с нейтральными атомами. Этому условию отвечает, очевидно, требование

$$\bar{v}_{ei} \ll \bar{v}_{en} \quad \text{или} \quad n_i \langle Q_{ei}^{(1)} \rangle \ll n_n \langle Q_{en}^{(1)} \rangle . \quad (8.7)$$

Наоборот, в случае полностью ионизованной плазмы

$$\bar{v}_{ei} \gg \bar{v}_{en} \quad \text{или} \quad n_i \langle Q_{ei}^{(1)} \rangle \gg n_n \langle Q_{en}^{(1)} \rangle . \quad (8.8)$$

Степень ионизации, разделяющая два этих предельных случая, определяется условием  $\bar{v}_{ei} = \bar{v}_{en}$  или

$$n_i/n_n = \langle Q_{en}^{(1)} \rangle / \langle Q_{ei}^{(1)} \rangle . \quad (8.9)$$

В качестве примера, иллюстрирующего применение этого условия, рассмотрим случай, когда нейтральными частицами являются молекулы водорода (пример взят из книги [8]). При этом

$$\langle Q_{en}^{(1)} \rangle \approx 13,5 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2 , \quad T \leq 4 \text{ эВ} ;$$

$$\langle Q_{en}^{(1)} \rangle \approx \frac{3,0 \cdot 10^{-17}}{T^{1/2}} \text{ м}^2 , \quad 4 \text{ эВ} \leq T \leq 30 \text{ эВ}$$

(напомним, что 1 эВ соответствует температуре  $T \approx 11400 \text{ К}$ ).

Если для вычисления  $\langle Q_{ei}^{(1)} \rangle$  воспользоваться формулами (8.6), то с помощью (8.9) можно найти критические значения отношения,  $n_i/n_n$ , при которых  $\bar{v}_{ei} = \bar{v}_{en}$ . Для различных значений  $n_e = n_i$  в диапазоне температур  $10^2 - 10^5 \text{ К}$  эти отношения приведены в табл. 8.1. Из таблицы следует, что из-за относительно большой величины сечений  $\langle Q_{ei}^{(1)} \rangle$  при низких температурах кулоновские столкновения заряженных частиц могут играть существенную роль даже при очень небольших степенях ионизации плазмы.

С использованием формул (8.2)–(8.4) для электропроводности слабоионизованного газа получаем

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \bar{v}_{en}} = 0,471 \frac{n_e e^2}{(m_e k T_e)^{1/2}} \frac{1}{n_n \langle Q_{en}^{(1)} \rangle} \quad (8.10)$$

Таблица 8.1

$n_e, \text{M}^{-3}$	$T, \text{K}$			
	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$
$10^{12}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$0.8 \cdot 10^{-1}$
$10^{15}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$
$10^{18}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$
$10^{21}$		$9 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-1}$
$10^{24}$			$9 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-1}$

Этот результат можно сравнить со значением электропроводности, получаемой методами строгой кинетической теории в пределе так называемого *лоренцевского газа* [1, 8]. Под газом Лоренца подразумевается смесь легкого (в данном случае это электроны) и тяжелого компонента при условии, что легкий компонент присутствует в малом количестве, так что можно пренебрегать взаимодействиями составляющих его частиц (электронов) по сравнению с взаимодействием частиц легкого и тяжелого компонентов (электронов и нейтралов). Получаемое в этом случае выражение для  $\sigma$  имеет вид [8, 34, 35]

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{n_e e^2}{kT_e} \int \frac{v^2}{v_{en}(v)} f_e^M d\mathbf{v} \quad , \quad (8.11)$$

где  $f_e^M$  – максвелловская функция распределения электронов по скоростям, а частота столкновений с передачей импульса  $v_{en}(v)$  определена выражением (7.26). Используя представление  $f_e^M d\mathbf{v} = 4\pi f_e^M v^2 dv$  и вводя переменную  $x = (m_e/2kT_e)^{1/2} v$ , можно представить (8.11) в виде

$$\sigma = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{n_e e^2}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{x^4}{v_{en}(v)} \exp(-x^2) dx \quad . \quad (8.12)$$

Если эффективное сечение рассеяния электрона на атоме  $Q_{en}^{(1)}(v)$  убывает приблизительно как  $1/v$  (что характерно, например для рассеяния электронов на атомах водорода и гелия в диапазоне энергий (3 – 50) эВ), то  $v_{en}(v) = v Q_{en}^{(1)}(v) = \text{const}$ . В этом случае  $v_{en}(v)$  совпадает с эффективной частотой столкновений  $\bar{v}_{en}$  и интегрирование (8.12) (значение интеграла см. в Приложении 1) приводит к результату, в точности совпадающему с (8.10). Для случая, когда эффективное сечение  $Q_{en}^{(1)}(v)$  не зависит от скорости электрона, т.е. когда  $v_{en}(v) \sim v$  (что имеет место, например, для рассеяния электронов на атомах неона и азота в том же диапазоне энергий) значение электропроводности, рассчитанной по формуле (8.12), превышает значение, следующее из (8.10), на 13 % (коэффициент 0,532 вместо 0,471). Отличия от результата (8.10) могут оказаться более значительными, если зависимость  $v_{en}(v)$  носит существенно немонотонный характер (как, например, при рассеянии электронов на атомах тяжелых инертных газов).

Обратимся теперь к случаю полностью ионизованной плазмы ( $\bar{v}_{ei} \gg \bar{v}_{en}$ ). Используя в (8.2) выражение для  $\bar{v}_{ei}$  (8.5), находим

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \bar{v}_{ei}} = 0,298 \frac{(kT_e)^{3/2}}{m_e^{1/2}} \frac{(4\pi\epsilon_0)^2}{Ze^2 \ln \Lambda} \quad (8.13)$$

Выражение для  $\sigma$ , которое можно считать практически точным, было получено Спитцером и Хэрмом [15] на основе численного интегрирования уравнений, получаемых методом Чепмена-Энскога [1], и имеет вид

$$\sigma = 1,975 \frac{n_e e^2}{m_e \bar{v}_{ei}} = 0,589 \frac{(kT_e)^{3/2}}{m_e^{1/2}} \frac{(4\pi\epsilon_0)^2}{Ze^2 \ln \Lambda}, \quad (8.14)$$

Таким образом, точное значение электропроводности полностью ионизованной плазмы оказывается примерно в два раза больше значения, получаемого на основе соотношения (8.13).

Электропроводность частично ионизованной плазмы рассчитывалась во многих работах (см., например, [8,18,34] и обзорную статью [35]). В них анализировалась, в частности, сходимость выра-

жений для электропроводности, получаемая при использовании более высоких приближений метода Чепмена-Каулинга [1], учитывающих несколько полиномов Сонина в разложении функции распределения. Для многих частично ионизованных газов уже использование второго или третьего приближения дает для электропроводности вполне удовлетворительные результаты. Плохая сходимость наблюдается в случаях, когда эффективное сечение рассеяния электронов на атомах имеет резко выраженный рамзауэровский минимум (атомы Ag, Kr, Xe). В качестве альтернативы этим выражениям мы приведем здесь известную формулу Фроста, использующую так называемое “правило смеси”, которая обеспечивает правильный предельный переход к случаям слабоионизованной и полностью ионизованной плазмы. Правило это заключается в том, что в выражение для электропроводности лоренцевского газа (8.12) вместо  $\nu_{en}(v)$  подставляется модифицированное выражение для эффективной частоты столкновений вида

$$\nu^F(v) = \nu_{en}(v) + 0,476 \frac{8\pi n_i}{v^2} \left( \frac{m_e}{2kT_e} \right)^{1/2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (8.15)$$

Отметим, что зависимость от скорости второго члена в этом выражении иная, чем в обычном выражении (7.25) для  $\nu_{ei}(v)$  в случае полностью ионизованной плазмы, и выбрана в таком виде, поскольку при конкретных расчетах обеспечивает близкое к (8.14) значение в предельном случае полной ионизации. Вместе с тем, использование (8.15) в формуле (8.12) дает достаточно точные результаты при промежуточных степенях ионизации, что подтверждается сравнением с расчетами электропроводности, основанными на других методах. Даже в случае рассеяния электронов на атомах тяжелых инертных газов “правило смеси” дает достаточно удовлетворительные результаты,

На рис. 8.1 представлено сравнение значений электропроводности, рассчитанных разными методами, в функции температуры для частично ионизованной плазмы аргона (результаты взяты из книги [8]). По оси ординат отложены значения отношения  $\sigma$  к электропроводности, определяемой формулой (8.2). Сплошная кривая соответствует расчетам, полученным с учетом 12-го порядка при-

ближения в разложении по полиномам Сонина. Пунктирная кривая рассчитана с использованием правила смеси.

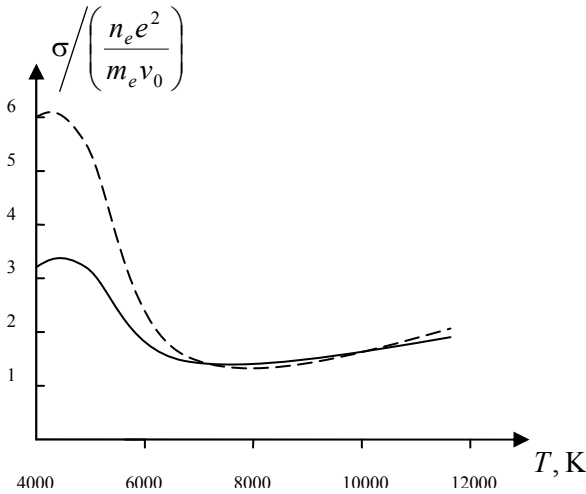


Рис. 8.1

## 8.2. Теплопроводность плазмы

Тепловой поток в частично ионизованной плазме складывается в общем случае из переноса тепла электронами, ионами и нейтральными атомами. Покажем, что в частично ионизованной плазме в отсутствие магнитного поля вкладом ионной теплопроводности можно фактически пренебречь, и коэффициент теплопроводности плазмы определяется в основном вкладом электронного и нейтрального компонентов.

Рассмотрим сначала случай полностью ионизованной плазмы, образованной их электронами и однократно заряженных ионов ( $Z = 1$ ). Если использовать формулу Васильевой (5.46), полученную методами средней длины свободного пробега, то парциальные теплопроводности электронов и ионов можно представить в виде

$$\kappa_e = \frac{\kappa_{ee}}{1 + H_{ei} \frac{n_i}{n_e}}, \quad \kappa_i = \frac{\kappa_{ii}}{1 + H_{ie} \frac{n_e}{n_i}}. \quad (8.16)$$

Для теплопроводностей чистых компонентов будем использовать соотношение (5.47), соответствующее первому приближению Чепмена -Каулинга

$$\kappa_{\alpha\alpha} = \frac{15}{4} \frac{k}{m_\alpha} \eta_{\alpha\alpha} , \quad (8.17)$$

где

$$\eta_{\alpha\alpha} = \frac{5}{8} \frac{kT_\alpha}{\Omega_{\alpha\alpha}^{(2,2)}} . \quad (8.18)$$

Легко показать, что для кулоновских взаимодействий  $\Omega_{ee}^{(2,2)} = 2\Omega_{ee}^{(1,1)}$ . Тогда с учетом соотношения (7.29) между  $\bar{V}_{\alpha\beta}$  и  $\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)}$  получаем

$$\begin{aligned} \kappa_{ee} &= \frac{25}{4} \frac{n_e k^2 T_e}{m_e \bar{V}_{ee}} = \frac{25}{4} \frac{k}{m_e} p_e \tau_{ee} , \\ \kappa_{ii} &= \frac{25}{4} \frac{n_i k^2 T_i}{m_i \bar{V}_{ii}} = \frac{25}{4} \frac{k}{m_i} p_i \tau_{ii} . \end{aligned} \quad (8.19)$$

Для оценок положим, что  $H_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}$ , где  $G_{\alpha\beta}$  определено выражением (5.46). Используя (6.8) и (8.18), можно при  $Z = 1$  представить эти величины как

$$\begin{aligned} H_{ei} &= \frac{6}{5} \frac{kT_e}{m_e p} \frac{\eta_{ee}}{D_{ei}} = 2 \frac{\bar{V}_{ei}}{\bar{V}_{ee}} = \sqrt{2} , \\ H_{ie} &= \frac{6}{5} \frac{kT_i}{m_i p} \frac{\eta_{ii}}{D_{ie}} = 2 \frac{m_e}{m_i} \frac{\bar{V}_{ie}}{\bar{V}_{ii}} \sim \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \ll 1 . \end{aligned}$$

(Здесь использованы определения (7.37) и (7.38) для величин  $\bar{V}_{ee}$  и  $\bar{V}_{ii}$ ). В результате, пренебрегая малыми членами, имеем

$$\kappa_e = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \kappa_{ee} , \quad \kappa_i = \kappa_{ii} .$$

Заметим теперь, что в соответствии с (8.19) и с учетом выражений для  $\bar{V}_{ee}$  и  $\bar{V}_{ii}$



$$\kappa_e \sim \frac{T_e^{5/2}}{m_e^{1/2}} \frac{1}{\ln \Lambda}, \quad \kappa_i \sim \frac{T_i^{5/2}}{m_i^{1/2}} \frac{1}{\ln \Lambda}.$$

Для отношения коэффициентов теплопроводности при  $T_e = T_i$  имеем

$$\kappa_i / \kappa_e \sim (m_e / m_i)^{1/2} \ll 1, \quad (8.20)$$

откуда следует, что основной вклад в теплопроводность полностью ионизованной плазмы вносит ее электронный компонент. Учитывая определение  $\kappa_{ee}$  (8.19), для коэффициента теплопроводности полностью ионизованной плазмы получаем

$$\kappa = \kappa_e = 1,989 \frac{k^2 n_e T_e}{m_e \bar{v}_{ei}}. \quad (8.21)$$

Расчет теплопроводности методами строгой теории (в результате численного интегрирования уравнений метода Чепмена-Энскога [15, 8] или с учетом трех полиномов Сонина в разложении функции распределения в том же методе [36]) дает значения числового коэффициента 3,203 вместо 1,989. В результате практически точное выражение для теплопроводности полностью ионизованной плазмы при  $Z = 1$  имеет вид

$$\kappa = 3,203 \frac{k^2 n_e T_e}{m_e \bar{v}_{ei}} = 0,958 \frac{k}{m_e^{1/2}} \left( \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 \frac{(kT_e)^{5/2}}{\ln \Lambda}. \quad (8.22)$$

Теплопроводность частично ионизованной плазмы складывается из обычной теплопроводности тяжелых частиц (нейтралов)  $\kappa_{nn}$ , которая определяется выражением (8.17), и электронной теплопроводности  $\kappa_e$ . Относительным вкладом ионного компонента в этом случае также можно пренебречь. Вклад теплопроводности нейтрального компонента с ростом степени ионизации  $\alpha$  уменьшается пропорционально отношению  $(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$  [18]. При малых степенях ионизации из формул Васильевой следует

$$\kappa = \kappa_{nn} + \alpha \frac{\kappa_{ee}}{H_{en}}, \quad H_{en} = \frac{kT_e}{m_e n} \frac{\eta_{ee}}{D_{en}}. \quad (8.23)$$

Уже при относительно малых степенях ионизации  $\alpha$  вклад второго члена в выражении (8.23), связанного с электронной теплопро-

водностью, может оказаться значительным. Выражение для электронной теплопроводности при произвольных степенях ионизации, следующее из применения правила смеси, мы обсудим в следующем параграфе.

### 8.3. «Термосила» и термодиффузия в плазме

Рассмотрим вклад термодиффузии в выражение для плотности тока проводимости  $\mathbf{j}$  и электронный тепловой поток  $\mathbf{q}_e$ . Предшествующий анализ показал, что в отсутствие магнитного поля плотность тока проводимости в плазме определяется в основном диффузией электронов. Для стационарных медленных течений плазмы уравнение баланса импульса для электронного компонента можно записать в виде

$$\nabla p_e + n_e e \mathbf{E} = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_e^T . \quad (8.24)$$

В правой части этого уравнения добавлен член, соответствующий так называемой «термосиле»  $\mathbf{R}_e^T$ , учет которой оказывается существенным при наличии градиента температуры.

Рассмотрим сначала случай полностью ионизованной плазмы. Выражения для  $\mathbf{R}_e$  и  $\mathbf{R}_e^T$  имеют при этом вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e &= -n_e m_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) , \\ \mathbf{R}_e^T &= -n_e m_e \bar{v}_{ei} \xi_{ei} \frac{\mathbf{h}_e}{p_e} . \end{aligned} \quad (8.25)$$

Мы использовали здесь выражение для  $\mathbf{R}_1^T$  (6.39), в котором член с индексом «1» соответствует электронам, а член с индексом «2» (ионы) может быть опущен, поскольку он пропорционален малому отношению  $(m_e/m_i)$ . Полагая  $\mathbf{h}_e = -\kappa_e \nabla T_e$ , плотность тока проводимости в полностью ионизованной плазме  $\mathbf{j} = -n_e e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$  можно представить в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \left( E + \frac{\nabla p_e}{n_e e} \right) + \phi \nabla T_e = \sigma E^* + \phi \nabla T_e . \quad (8.26)$$

Коэффициент  $\phi$  записывается при этом как

$$\varphi = \frac{kT_e}{e} \sigma \alpha_T^e, \quad (8.27)$$

где постоянная термодиффузии электронов  $\alpha_T^e$  определена выражением

$$\alpha_T^e = -\frac{1}{kn_e} \xi_{ei} \frac{\kappa_e}{D_{ei}}. \quad (8.28)$$

Здесь  $k_e$  – парциальный коэффициент теплопроводности электронов,  $D_{ei}$  – коэффициент электрон-ионной диффузии. Для полностью ионизованной плазмы

$$D_{ei} = \frac{kT_e}{m_e \bar{v}_{ei}}, \quad \xi_{ei} = -0,6. \quad (8.29)$$

Используя выражение для  $\kappa_e$  (8.21), полученное на основе формул Васильевой, находим

$$\alpha_T^e = 1,193, \quad \varphi = 1,193 \frac{n_e k}{m_e \bar{v}_{ei}}. \quad (8.30)$$

С учетом выражения (8.5) для  $\bar{v}_{ei}$  получаем

$$\varphi = 0,703 \frac{k(kT_e)^{3/2}}{m_e^{1/2}} \frac{(4\pi\epsilon_0)^2}{Ze^3 \ln \Lambda}. \quad (8.31)$$

Коэффициент  $\varphi$  для полностью ионизованной плазмы рассчитывался Спитцером и Хэрмом [15] на основе численного интегрирования уравнений метода Чепмена-Энскога. Соответствующий результат имеет вид [8,15]

$$\varphi = 0,818 \frac{k(kT_e)^{3/2}}{m_e^{1/2}} \frac{(4\pi\epsilon_0)^2}{Ze^3 \ln \Lambda}, \quad (8.32)$$

т. е. отличается от нашего приближенного выражения всего лишь на 12%

Выражение для плотности тока (8.26) сохраняет свой вид и в случае частично ионизованной плазмы. В случае слабой ионизации для определения коэффициента  $\varphi$  можно, как и в рассмотренных ранее случаях электропроводности и теплопроводности, использо-

вать результаты строгой теории для лоренцевского газа. Соответствующее выражение для  $\varphi$  имеет при этом вид [8]

$$\varphi = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{kn_e e}{m_e} \int \frac{x^4}{v_{en}(v)} \left( x^2 - \frac{5}{2} \right) \exp(-x^2) dx \quad (8.33)$$

Заметим, что для случая  $v_{en}(v) = \text{const}$  в результате интегрирования в выражении (8.33) получаем  $\varphi = 0$ . Это находится в полном соответствии с обращением в нуль коэффициента термодиффузии для модели так называемых “максвелловских молекул”. Как уже отмечалось, именно для этой модели эффективная частота столкновений с передачей импульса не зависит от скорости.

В случае произвольной степени ионизации плазмы для определения  $\varphi$  в [8] предложено использовать правило смеси Фроста, в котором  $v_{en}(v)$  заменяется выражением

$$v_{\varphi}^F = v_{en}(v) + 0,6766 \frac{8\pi n_i}{v^2} \left( \frac{m_e}{2kT_e} \right)^{1/2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (8.34)$$

Обратимся теперь к анализу вклада термодиффузии в выражение для теплового потока. Анализ, проведенный в предыдущем параграфе, показал, что основной вклад в тепловой поток в плазме в отсутствие магнитного поля вносит электронный компонент плазмы. Учитывая присутствие в выражении для теплового потока членов, связанных с переносом тепла за счет диффузии (см. выражение (3.84)), а также вклад термодиффузии, тепловой поток электронов можно представить в виде [8,18,35]

$$\mathbf{q}_e = -\kappa_e \nabla T_e - \left( \frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} - \chi \right) \mathbf{j}, \quad (8.35)$$

где

$$\chi = -\frac{kT_e^2}{e} \alpha_T^e. \quad (8.36)$$

Член, связанный с коэффициентом  $\chi$ , оказывается перекрестным по отношению к члену в выражении для  $\mathbf{j}$  (8.26), пропорциональ-

ному коэффициенту  $\varphi$ . Коэффициенты  $\chi$  и  $\varphi$  связаны соотношением  $\chi = -T_e(\varphi/\sigma)$ , что вытекает также из выполнения соотношений симметрии Онзагера в рамках термодинамики необратимых процессов.

Выражение для потока тепла (8.35) можно записать в другой форме, когда в качестве параметров, вызывающих появление потока тепла, выступают градиент температуры и приложенное к плазме электрическое поле  $\mathbf{E}$ . Для этого достаточно подставить в (8.35) выражение для  $\mathbf{j}$  (8.26). В результате получаем

$$\mathbf{q}_e = -\frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} \mathbf{j} - \kappa'_e \nabla T_e - \psi \mathbf{E}^* . \quad (8.37)$$

При этом

$$\kappa'_e = \kappa_e - \varphi \chi = \kappa_e + T_e \frac{\varphi^2}{\sigma} , \quad \psi = \varphi T_e \quad (8.38)$$

Подчеркнем, что истинной электронной теплопроводности в плазме соответствует именно коэффициент  $\kappa_e$ , а не  $\kappa'_e$ , поскольку экспериментально коэффициент теплопроводности определяется в стационарных условиях, когда диффузионный поток уже отсутствует. Действительно, градиент температуры в соответствии с выражением (8.26) вызывает перенос заряда, который создает вторичное электрическое поле, связанное с накоплением заряда. Появление этого поля приводит к тому, что в стационарном состоянии плотность тока  $\mathbf{j}$  обращается в нуль, иначе происходило бы неограниченное нарастание электрического поля.

Рассмотрим еще вопрос об электронной теплопроводности слабоионизованной плазмы, воспользовавшись результатами строгой теории для лоренцевской плазмы. В этом случае коэффициент электронной теплопроводности  $\kappa'_e$ , фигурирующий в соотношении (8.37), определяется как [ 8 ]

$$\kappa'_e = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{k^2 n_e T_e}{m_e} \int \frac{x^4}{v_{en}(v)} \left( x^2 - \frac{5}{2} \right)^2 \exp(-x^2) dx . \quad (8.39)$$

Истинная электронная теплопроводность  $\kappa_e$  определяется при этом из соотношения (8.38), где  $\sigma$  и  $\varphi$  в лоренцевском приближении определялись ранее.

Для произвольной степени ионизации можно использовать правило смеси Фроста. Выражение для  $\kappa'_e$  для этого случая приведено в [8]. За основу берется лоренцевское выражение (8.39), в котором вместо  $v_{en}(v)$  подставляется выражение

$$v_{\kappa'}^F = v_{en}(v) + 1,012 \frac{8\pi n_i}{v^2} \left( \frac{m_e}{2kT_e} \right)^{1/2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (8.40)$$

Соответственно  $\kappa_e$  определяется из соотношения (8.38), в котором  $\varphi$  и  $\sigma$  заменяются на  $\varphi^F$  и  $\sigma^F$ .

#### 8.4. Вязкость плазмы

Тензор вязких напряжений  $\pi_{rs}$ , который входит в уравнение движения плазмы (7.11), в отсутствие магнитного поля определяется обычным линейным соотношением

$$\pi_{rs} = -2\eta S_{sr}, \quad S_{rs} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right) - \frac{1}{3} \delta_{rs} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (8.41)$$

где коэффициент вязкости плазмы  $\eta$  равен сумме парциальных вязкостей компонентов

$$\eta = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}.$$

Рассмотрим сначала случай полностью ионизованной плазмы, образованной из электронов и однократно заряженных ионов. Используя формулу Васильевой (5.37), имеем

$$\eta_e = \frac{\eta_{ee}}{1 + G_{ei} \frac{n_i}{n_e}}, \quad \eta_i = \frac{\eta_{ii}}{1 + G_{ie} \frac{n_e}{n_i}}. \quad (8.42)$$

Для вязкостей чистых компонентов можно воспользоваться формулой (8.18), из которой с учетом связи между  $\bar{v}_{\alpha\beta}$  и  $\Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)}$  для кулоновских взаимодействий следует

$$\eta_{ee} = \frac{5 n_e k T_e}{3 \bar{v}_{ee}} = \frac{5}{3} p_e \tau_{ee}, \quad \eta_{ii} = \frac{5 n_i k T_i}{3 \bar{v}_{ii}} = \frac{5}{3} p_i \tau_{ii}, \quad (8.43)$$

где  $\bar{v}_{ee}$  и  $\bar{v}_{ii}$  определены выражениями (7.37) и (7.38). Величины  $G_{ei}$  и  $G_{ie}$  в соответствии с выражением (5.46) и используя (6.8) и (8.18), можно представить как

$$G_{ei} = \frac{6 k T_e}{5 m_e p} \frac{\eta_{ee}}{D_{ei}} = 2 \frac{\bar{v}_{ei}}{\bar{v}_{ee}} = \sqrt{2},$$

$$G_{ie} = \frac{6 k T_i}{5 m_i p} \frac{\eta_{ii}}{D_{ie}} = 2 \frac{m_e v_{ie}}{m_i v_{ii}} \sim \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, в пренебрежении малыми членами  $\sim (m_e/m_i)^{1/2}$ , имеем

$$\eta_e = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \eta_{ee}, \quad \eta_i = \eta_{ii}. \quad (8.44)$$

Заметим теперь, что в соответствии с (8.35) и определениями  $\bar{v}_{ee}$  и  $\bar{v}_{ii}$

$$\eta_e \sim m_e^{1/2} T_e^{5/2} / \ln \Lambda, \quad \eta_i \sim m_i^{1/2} T_i^{5/2} / \ln \Lambda$$

Очевидно, что при  $T_e = T_i$

$$\eta_e / \eta_i \sim (m_e / m_i)^{1/2} \ll 1, \quad (8.45)$$

Отсюда следует, что вкладом электронной вязкости в полную вязкость плазмы можно пренебречь. Для неизотермической плазмы при  $T_e > T_i$  вклад ее может сравняться с вкладом вязкости ионов, если выполняется условие  $T_e / T_i \sim (m_i / m_e)^{1/5}$ .

С учетом определения  $\bar{V}_{ii}$  (7.38) выражение для ионной вязкости (8.43) запишется в виде

$$\eta_i = \frac{5}{3} p_i \tau_{ii} = 0,48 \left( \frac{4\pi\epsilon_0}{Z^2 e^2} \right)^2 \frac{\sqrt{m_i} (kT_i)^{5/2}}{\ln \Lambda}. \quad (8.46)$$

Расчет ионной вязкости методами строгой теории (с учетом двух полиномов Сонина в разложении функции распределения) приводит к выражению [36]

$$\eta_i = 1,92 p_i \tau_{ii} = 0,55 \left( \frac{4\pi\epsilon_0}{Z^2 e^2} \right)^2 \frac{\sqrt{m_i} (kT_i)^{5/2}}{\ln \Lambda}. \quad (8.47)$$

Рассмотрим теперь случай частично ионизованной плазмы, образованной из электронов, ионов ( $Z = 1$ ) и нейтральных атомов того же сорта ( $m_i = m_n = m$ ). Анализ показывает, что вкладом вязкости электронного компонента можно пренебречь и в этом случае, поэтому вязкость будет определяться ионным и атомным компонентами, относительный вклад которых существенно зависит от степени ионизации плазмы  $\alpha = n_i / (n_i + n_n)$ . На основе формул Васильевой (5.37) имеем

$$\eta = \frac{\eta_{ii}}{1 + G_{in} \frac{1 - \alpha}{\alpha}} + \frac{\eta_{nn}}{1 + G_{ni} \frac{\alpha}{1 - \alpha}}. \quad (8.48)$$

Параметры  $G_{in}$  и  $G_{ni}$  определяются как

$$G_{in} = \frac{6}{5} \frac{\eta_{ii}}{\rho D_{in}}, \quad G_{ni} = \frac{6}{5} \frac{\eta_{nn}}{\rho D_{ni}}, \quad \rho = \frac{mp}{kT}.$$

При низких степенях ионизации основной вклад в вязкость будет вноситься нейтральным компонентом. С ростом степени ионизации заметную роль начинает играть ионный компонент. Поскольку среднее эффективное сечение ион-ионных столкновений при сравнимых температурах оказывается на два-три порядка больше, чем соответствующее сечение столкновений нейтрал-нейтрал, это приводит к заметному падению вязкости плазмы в том диапазоне степеней ионизации, где вклад ионной вязкости становится существенным. В области полной ионизации вязкость плазмы опять начинает расти с температурой в соответствии с формулой (8.47) по закону  $\eta_i \sim T_i^{5/2}$ . В качестве примера на рис. 8.1 представлены ха-



ракетные зависимости вязкости частично ионизованного гелия от температуры. Кривые 1, 2, 3 соответствуют расчетным значениям вязкости гелия в состоянии ионизационного равновесия при значениях давлений  $p=0,01$  атм,  $p=0,1$  атм и  $p=1$  атм соответственно. Характер зависимостей полностью подтверждает высказанные выше соображения.

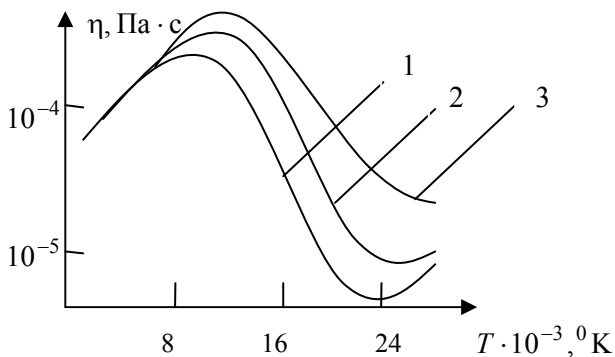


Рис. 8.1

### 8.5. Влияние магнитного поля на коэффициенты переноса

Как следует из вывода обобщенного закона Ома, проведенного в предыдущей главе, магнитное поле заметным образом влияет на перенос заряженных частиц поперек магнитного поля. При этом наряду с обычным коэффициентом электропроводности  $\sigma$ , который остается тем же для компоненты плотности тока, параллельной магнитному полю, возникают еще два коэффициента: поперечная электропроводность  $\sigma_{\perp}$  и холловская электропроводность  $\sigma_H$ . Если в плазме имеется градиент температуры, то в присутствии магнитного поля усложняется и та часть выражения для плотности тока проводимости (8.29), которая связана с учетом вклада термодиффузии электронов. Соответствующий обобщенный закон Ома принимает в этом случае вид [8,18]

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^* + \sigma_H (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*) + \\ + \varphi_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e + \varphi_{\perp} \nabla_{\perp} T_e + \varphi_H (\mathbf{k} \times \nabla T_e) . \quad (8.41)$$

Здесь  $\varphi_{\parallel} = \varphi$ , а коэффициенты  $\varphi_{\perp}$  и  $\varphi_H$  так же, как  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_H$  зависят от величины магнитного поля и заметно уменьшаются с ростом величины параметра Холла для электронов. Общие выражения для них можно найти в [8, 18, 35].

В присутствии магнитного поля усложняется и выражение для электронного теплового потока  $\mathbf{q}_e$  которое приобретает вид, подобный представлению обобщенного закона Ома. Формальное выражение для него можно записать как

$$\mathbf{q}_e - \frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} \mathbf{j} = -\kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \kappa_H (\mathbf{k} \times \nabla T_e) + \\ + \chi_{\parallel} \mathbf{j}_{\parallel} + \chi_{\perp} \mathbf{j}_{\perp} + \chi_H (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) . \quad (8.42)$$

Здесь  $\kappa_{\parallel} = \kappa_e$ ,  $\chi_{\parallel} = \chi$ , а поперечные и холловские коэффициенты теплопроводности  $\kappa_{\perp}$  и  $\kappa_H$ , а также соответствующие коэффициенты  $\chi_{\perp}$  и  $\chi_H$  определяются выражениями, зависящими от величины магнитного поля. Характер их зависимости от электронного параметра Холла близок к аналогичным зависимостям, полученным выше для поперечной и холловской электропроводности. Различные представления этих величин в зависимости от используемых методов расчета можно найти в [8, 18, 35].

Что касается вязкости, то влияние магнитного поля на нее, связано с ионным параметром Холла  $\beta_i = \omega_i \tau_{ii}$ . С ростом магнитного поля зависимость вязкости от него проявляется гораздо позже, чем влияние электронного параметра Холла ( $\beta_e \gg \beta_i$ ) на другие коэффициенты переноса. Из-за симметричности тензора вязких напряжений он имеет пять независимых компонент и поэтому при наличии магнитного поля характеризуется пятью коэффициентами вязкости. Если в декартовой системе координат магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , то только компонента  $\pi_{zz}$  имеет тот же вид, что и в отсутствие магнитного поля, с обычным коэффициентом

вязкости, определяемым полученными выше выражениями. Остальные компоненты тензора и соответствующие поперечные коэффициенты вязкости зависят от ионного параметра Холла. Структура соответствующих выражений для компонент тензора вязких напряжений и сами коэффициенты вязкости приводятся в работах [35, 36].

## Приложение 1. Интегралы от распределения Максвелла

Все встречающиеся в тексте интегралы от максвелловского распределения могут быть получены из основного интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dz .$$

Для его вычисления воспользуемся следующим приемом. Запишем тождественный интеграл через переменную  $y$  и перемножим их. В результате

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x^2 + y^2)] dx dy .$$

Будем теперь рассматривать  $x$  и  $y$  как полярные координаты на плоскости и перейдем к новым переменным

$$x^2 + y^2 = r^2 , \quad dx dy = r dr d\varphi .$$

Интеграл  $I^2$  в новых переменных легко вычисляется

$$I^2 = \int_0^{\infty} \exp(-r^2) dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \int_0^{\infty} \exp(-r^2) dr^2 = \pi .$$

Для исходного интеграла получаем результат

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dz = \sqrt{\pi} .$$

Используя подстановку  $z^2 = a x^2$ ,  $dz = \sqrt{a} dx$ , имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a z^2) dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} .$$

Дифференцированием по параметру  $a$  получаются формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp(-a z^2) dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2} ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^4 \exp(-a z^2) dz = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} a^{-5/2} ,$$

В пределах от 0 до  $\infty$  интегралы с четными степенями  $z$  в два раза меньше приведенных выше значений.

Для нечетных степеней  $z$  интегралы в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  равны нулю. Интегралы с нечетными степенями  $z$  в пределах от 0 до  $\infty$  берутся подстановкой  $a z^2 = u$  и интегрированием по частям

$$\int_0^{\infty} z \exp(-a z^2) dz = \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \exp(-u) du = \frac{1}{2a},$$

$$\int_0^{\infty} z^3 \exp(-a z^2) dz = \frac{1}{2a^2} \int_0^{\infty} u \exp(-u) du = \frac{1}{2a^2} \int_0^{\infty} \exp(-u) du = \frac{1}{2a^2}.$$

*Общие выражения для интегралов при целых значениях  $n$*

$n$  – четное число

$$\int_0^{\infty} z^n \exp(-a z^2) dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{n-1}{2} a^{-(n+1)/2};$$

$n$  – нечетное число

$$\int_0^{\infty} z^n \exp(-a z^2) dz = \frac{1}{2} a^{-(n+1)/2} \left( \frac{n-1}{2} \right)!$$

**Приложение 2. Таблицы  $\Omega^*$  - интегралов**

$T^*$	$\Omega^{(1,1)*}$	$\Omega^{(2,2)*}$	$T^*$	$\Omega^{(1,1)*}$	$\Omega^{(2,2)*}$	$T^*$	$\Omega^{(1,1)*}$	$\Omega^{(2,2)*}$
0,30	2,662	2,785	1,65	1,153	1,264	4,0	0,8836	0,9700
0,35	2,476	2,628	1,70	1,140	1,248	4,1	0,8788	0,9649
0,40	2,318	2,492	1,75	1,128	1,234	4,2	0,8740	0,9600
0,45	2,184	2,368	1,80	1,116	1,221	4,3	0,8694	0,9553
0,50	2,066	2,257	1,85	1,105	1,209	4,4	0,8652	0,9507
0,55	1,996	2,156	1,90	1,094	1,197	4,5	0,8610	0,9464
0,60	1,877	2,065	1,95	1,084	1,186	4,6	0,8568	0,9422
0,65	1,798	1,982	2,0	1,075	1,175	4,7	0,8530	0,9382
0,70	1,729	1,908	2,1	1,057	1,156	4,8	0,8492	0,9343
0,75	1,667	1,841	2,2	1,041	1,138	4,9	0,8456	0,9305
0,80	1,6612	1,780	2,3	1,026	1,122	5,0	0,8422	0,9269
0,85	1,562	1,725	2,4	1,012	1,107	6,0	0,8124	0,8963
0,90	1,517	1,675	2,5	0,9996	1,093	7,0	0,7896	0,8727
0,95	1,476	1,629	2,6	0,9878	1,081	8,0	0,7712	0,8538
1,00	1,439	1,587	2,7	0,9770	1,069	9,0	0,7556	0,8379
1,05	1,406	1,549	2,8	0,9672	1,058	10,0	0,7424	0,8242
1,10	1,375	1,514	2,9	0,9576	1,048	20,0	0,6640	0,7432
1,15	1,346	1,482	3,0	0,9490	1,039	30,0	0,6232	0,7005
1,20	1,320	1,452	3,1	0,9406	1,030	40,0	0,5960	0,6718
1,25	1,296	1,424	3,2	0,9328	1,022	50,0	0,5756	0,6504
1,30	1,273	1,399	3,3	0,9256	1,014	60,0	0,5596	0,6335
1,35	1,253	1,375	3,4	0,9186	1,007	70,0	0,5464	0,6194
1,40	1,233	1,353	3,5	0,9120	0,9999	80,0	0,5352	0,6076
1,45	1,215	1,333	3,6	0,9058	0,9932	90,0	0,5256	0,5973
1,50	1,198	1,314	3,7	0,8998	0,9870	100,0	0,5130	0,5882
1,55	1,182	1,296	3,8	0,8942	0,9811	200,0	0,4644	0,5320
1,60	1,167	1,279	3,9	0,8888	0,9755	300,0	0,4360	0,5016

### Приложение 3. Средняя передача импульса и энергии при столкновениях частиц в неизотермической плазме

Общие выражения для среднего изменения импульса и энергии частиц сорта 1 при их столкновениях с частицами сорта 2 имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \int m_1 (\mathbf{c}'_1 - \mathbf{c}_1) f_1(\mathbf{c}_1) f_2(\mathbf{c}_2) g \sigma_{12}(g, \chi) \sin \chi d\chi d\varphi d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 = \\ &= \mu_{12} \int \mathbf{g} g Q_{12}^{(1)}(g) f_1(\mathbf{c}_1) f_2(\mathbf{c}_2) d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2, \end{aligned} \quad (\text{П.3.1})$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int \frac{m_1}{2} (c_1^2 - c_1'^2) f_1(\mathbf{c}_1) f_2(\mathbf{c}_2) g \sigma_{12}(g, \chi) \sin \chi d\chi d\varphi d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 = \\ &= \mu_{12} \int (\mathbf{g} \cdot \mathbf{U}) g Q_{12}^{(1)}(g) f_1(\mathbf{c}_1) f_2(\mathbf{c}_2) d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 \end{aligned} \quad (\text{П.3.2})$$

Здесь  $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$  – собственная скорость частиц и  $\mathbf{U} = \mathbf{G} - \mathbf{u}$  – скорость центра масс сталкивающихся частиц в системе отсчета, движущейся со среднemasсовой скоростью смеси  $\mathbf{u}$ . При этом используются соотношения

$$m_1 \mathbf{c}_1 = m_1 \mathbf{U} - \mu_{12} \mathbf{g}, \quad m_2 \mathbf{c}_2 = m_2 \mathbf{U} + \mu_{12} \mathbf{g}, \quad (\text{П.3.3})$$

где  $\mathbf{g} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$  – относительная скорость частиц.

Функции распределения частиц сорта  $\alpha$  задаются в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} (1 + 2\gamma_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha), \quad (\text{П.3.4})$$

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha \left( \frac{\gamma_\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-\gamma_\alpha c_\alpha^2), \quad \gamma_\alpha = \frac{m_\alpha}{2kT_\alpha}. \quad (\text{П.3.5})$$

Введем переменную  $\mathbf{X}$ , связанную с  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{g}$  соотношением

$$\mathbf{X} = \frac{\gamma_1 \mathbf{c}_1 + \gamma_2 \mathbf{c}_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \mathbf{U} + \frac{\mu_{12}}{\gamma_1 + \gamma_2} \left( \frac{\gamma_1}{m_1} - \frac{\gamma_2}{m_2} \right) \mathbf{g}. \quad (\text{П.3.6})$$

Нетрудно показать, что произведение  $f_1^{(0)} f_2^{(0)}$  в этом случае может быть представлено в виде

$$f_1^{(0)} f_2^{(0)} = n_1 n_2 \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\pi^2} \right)^{3/2} \exp(-\gamma_1 c_1^2 - \gamma_2 c_2^2) =$$

$$= n_1 n_2 \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{\gamma_{12}}{\pi} \right)^{3/2} \exp[-(\gamma_1 + \gamma_2)X^2] \exp(-\gamma_{12}g^2) ,$$

где

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} .$$

Используя (П.3.4) и оставляя в произведении  $f_1 f_2$  линейные относительно  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$  члены, имеем

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= f_1^{(0)} f_2^{(0)} (1 + 2\gamma_1 \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + 2\gamma_2 \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{c}_2) = \\ &= n_1 n_2 \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{\gamma_{12}}{\pi} \right)^{3/2} \exp[-(\gamma_1 + \gamma_2)X^2] \exp(-\gamma_{12}g^2) \times \\ &\quad \times [1 + 2(\gamma_1 \mathbf{w}_1 + \gamma_2 \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{X} - 2\gamma_{12}(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{g}] . \end{aligned} \quad (\text{П.3.7})$$

Для вычисления  $\mathbf{R}_1$  подставим (П.3.7) в (П.3.1) и учтем, что  $d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 = d\mathbf{X} d\mathbf{g}$ , где  $d\mathbf{X} = 4\pi X^2 dX$ ,  $d\mathbf{g} = 4\pi g^2 dg$ . Интегрирование по переменной  $\mathbf{X}$  можно произвести до конца. При этом часть интегралов обращается в нуль из-за нечетности подынтегральных выражений по  $\mathbf{X}$ , а оставшиеся интегралы приводят к результату

$$\mathbf{R}_1 = -n_1 \mu_{12} \bar{\mathbf{v}}_{12} (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) . \quad (\text{П.3.8})$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad \bar{\mathbf{v}}_{12} = \frac{4}{3} n_2 \langle \mathbf{g}_{12} \rangle \langle Q_{12}^{(1)} \rangle , \\ \langle Q_{12}^{(1)} \rangle &= \int_0^\infty x^5 \exp(-x^2) Q_{12}^{(1)}(\gamma_{12}^{-1/2} x) dx , \quad \langle \mathbf{g}_{12} \rangle = \left( \frac{4}{\pi \gamma_{12}} \right)^{1/2} . \end{aligned} \quad (\text{П.3.9})$$

Для расчета  $Q_1$  заметим, что с учетом (П.3.6)

$$(\mathbf{g} \cdot \mathbf{U}) = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{X}) - \frac{1}{2k} \frac{\mu_{12}}{\gamma_1 + \gamma_2} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) . \quad (\text{П.3.10})$$

Подставляя (П.3.10) и (П.3.7) в (П.3.2), после интегрирования по  $\mathbf{X}$  приходим к результату



$$Q_1 = -3k \frac{\mu_{12}}{m_1 + m_2} \bar{v}_{12} (T_1 - T_2). \quad (\text{П.3.11})$$

Полученные выражения легко обобщаются на случай многокомпонентной неизотермической плазмы. В этом случае

$$\mathbf{R}_\alpha = - \sum_{\beta \neq \alpha} n_\alpha \mu_{\alpha\beta} \bar{v}_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta), \quad (\text{П.3.12})$$

$$Q_\alpha = -3k \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta} n_\alpha \bar{v}_{\alpha\beta} (T_\alpha - T_\beta). \quad (\text{П.3.13})$$

Для изотермической плазмы ( $T_1 = T_2 = T$ ) имеем

$$\gamma_{12} = \frac{\mu_{12}}{2kT}, \quad \langle g_{12} \rangle = \left( \frac{8kT}{\pi\mu_{12}} \right)^{1/2}.$$

В этом случае выражение для  $\mathbf{R}_1$  (П.3.5) переходит в полученную в главе 4 формулу (4.77), где  $\bar{v}_{12}$  определяется выражениями (4.78) и (4.79).

#### Приложение 4. Расчет «термосилы»

Для вычисления «термосилы»  $\mathbf{R}_1^T$  используем общее выражение для  $\mathbf{R}_1$  (П.3.1), в котором

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} \left[ 1 + \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha + \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha \left( \gamma_\alpha c_\alpha^2 - \frac{5}{2} \right) \right], \quad (\text{П.4.1})$$

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha \left( \frac{\gamma_\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-\gamma_\alpha c_\alpha^2), \quad \gamma_\alpha = \frac{m_\alpha}{2kT}.$$

(Здесь используется однотемпературное приближение ( $T_\alpha = T$ )). Коэффициенты  $\mathbf{a}_\alpha$  и  $\mathbf{b}_\alpha$  выражаются через диффузионную скорость  $\mathbf{w}_\alpha$  и приведенный тепловой поток  $\mathbf{h}_\alpha$

$$\mathbf{a}_\alpha = 2\gamma_\alpha \mathbf{w}_\alpha, \quad \mathbf{b}_\alpha = \frac{4}{5} \gamma_\alpha \frac{\mathbf{h}_\alpha}{p_\alpha}. \quad (\text{П.4.2})$$

Вычисление термосилы связано с учетом третьего члена в разложении (П.4.1), пропорционального коэффициентам  $\mathbf{b}_\alpha$ . В этом случае при учете лишь тех членов, которые линейны относительно коэффициентов  $\mathbf{b}_\alpha$ , имеем

$$f_1 f_2 = f_1^{(0)} f_2^{(0)} \left[ 1 + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 \left( \gamma_1 c_1^2 - \frac{5}{2} \right) + \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2 \left( \gamma_2 c_2^2 - \frac{5}{2} \right) \right]. \quad (\text{П.4.3})$$

С использованием (П.3.1) выражение для «термосилы» принимает вид

$$\mathbf{R}_1^T = \mu_{12} \int \mathbf{g} g Q_{12}^{(1)}(g) f_1(\mathbf{c}_1) f_2(\mathbf{c}_2) d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2, \quad (\text{П.4.4})$$

где произведение  $f_1 f_2$  определяется выражением (П.4.3).

Перейдем к переменным  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{g}$  в системе центра масс сталкивающихся частиц в соответствии с соотношениями (П.3.3). Произведение  $f_1^{(0)} f_2^{(0)}$  записывается в этом случае как

$$f_1^{(0)} f_2^{(0)} = n_1 n_2 \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\pi^2} \right)^{3/2} \exp(-\gamma_1 c_1^2 - \gamma_2 c_2^2) =$$

$$= n_1 n_2 \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{\gamma_{12}}{\pi} \right)^{3/2} \exp[-(\gamma_1 + \gamma_2)U^2] \exp(-\gamma_{12}g^2), \quad (\text{П.4.5})$$

где  $\gamma_{12} = \mu_{12}/2kT$ .

Выражение в квадратных скобках (П.4.3) можно представить в виде

$$1 + \mathbf{b}_1 \left( \mathbf{U} - \frac{\mu_{12}}{m_1} \mathbf{g} \right) \left[ \gamma_1 \left( \mathbf{U} - \frac{\mu_{12}}{m_1} \mathbf{g} \right)^2 - \frac{5}{2} \right] + \\ + \mathbf{b}_2 \left( \mathbf{U} + \frac{\mu_{12}}{m_2} \mathbf{g} \right) \left[ \gamma_2 \left( \mathbf{U} + \frac{\mu_{12}}{m_2} \mathbf{g} \right)^2 - \frac{5}{2} \right]. \quad (\text{П.4.6})$$

Заметим также, что  $d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 = d\mathbf{U} d\mathbf{g}$ , где  $d\mathbf{U} = 4\pi U^2 dU$ ,  $d\mathbf{g} = 4\pi g^2 dg$ .

Раскрывая скобки в выражении (П.4.6), мы сохраним для дальнейших операций лишь те члены, которые являются четными относительно переменной  $\mathbf{U}$ , поскольку после подстановки (П.4.5) и (П.4.6) в выражение для  $\mathbf{R}_1^T$  (П.4.4) интегрирование по  $d\mathbf{U}$  обращает в нуль все интегралы, содержащие нечетные степени относительно переменной  $\mathbf{U}$ . Остающиеся линейные относительно коэффициентов  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  члены можно записать в виде

$$\left( \gamma_2 \mathbf{b}_2 \frac{\mu_{12}}{m_2} - \gamma_1 \mathbf{b}_1 \frac{\mu_{12}}{m_1} \right) \cdot [\mathbf{g} U^2 + 2\mathbf{U}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{g})] + \\ + \left[ \gamma_2 \mathbf{b}_2 \left( \frac{\mu_{12}}{m_2} \right)^3 - \gamma_1 \mathbf{b}_1 \left( \frac{\mu_{12}}{m_1} \right)^3 \right] \mathbf{g} g^2 - \frac{5}{2} \mu_{12} \left( \frac{\mathbf{b}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{b}_1}{m_1} \right) \cdot \mathbf{g}.$$

Введем обозначения

$$F(U^2) = 4\pi U^2 \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\pi} \right)^{3/2} \exp[-(\gamma_1 + \gamma_2)U^2],$$

$$\Phi(g^2) = 4\pi g^2 \left( \frac{\gamma_{12}}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-\gamma_{12}g^2).$$

Нетрудно показать, что после подстановки соответствующих выражений в (П.4.4) вычисление  $\mathbf{R}_1^T$  сводится к расчету интегральных выражений, которые удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \int \mathbf{g} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) g Q_{12}^{(1)}(g) U^2 F(U^2) \Phi(g^2) dU dg &= \\ &= \frac{1}{3} \mathbf{A} \int g^3 Q_{12}^{(1)}(g) U^2 F(U^2) \Phi(g^2) dU dg, \\ \int \mathbf{g} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{U} \cdot \mathbf{g}) g Q_{12}^{(1)}(g) U^2 F(U^2) \Phi(g^2) dU dg &= \\ &= \frac{1}{9} \mathbf{A} \int g^3 Q_{12}^{(1)}(g) U^2 F(U^2) \Phi(g^2) dU dg, \\ \int \mathbf{g} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) g^2 g Q_{12}^{(1)}(g) U^2 F(U^2) \Phi(g^2) dU dg &= \\ &= \frac{1}{3} \mathbf{A} \int g^5 Q_{12}^{(1)}(g) F(U^2) \Phi(g^2) dU dg. \end{aligned}$$

Далее выполняется интегрирование по переменной  $U$  с использованием выражений, приведенных в Приложении 1, так что

$$\int_0^{\infty} F(U^2) dU = 1, \quad \int_0^{\infty} U^2 F(U^2) dU = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Собирая вместе результаты интегрирования отдельных членов, входящих в выражение для  $\mathbf{R}_1^T$ , получаем окончательно

$$\mathbf{R}_1^T = \frac{16}{3} n_1 n_2 \mu_{12} kT \left( \Omega_{12}^{(1,2)} - \frac{5}{2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right) \left( \frac{\mathbf{b}_2}{m_2^2} - \frac{\mathbf{b}_1}{m_1^2} \right). \quad (\text{П.4.8})$$

Входящие в эту формулу  $\Omega$ -интегралы приводятся в главе 4 и имеют вид

$$\Omega_{12}^{(\ell,r)} = \left( \frac{k T}{2\pi\mu_{12}} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} x^{2r+3} \exp(-x^2) Q_{12}^{(\ell)}(g) dx.$$

Определим коэффициент бинарной диффузии смеси выражением (см. формулу (6.8) главы 6)

$$[D_{12}]_1 = \frac{3}{16} \frac{kT}{n\mu_{12}\Omega_{12}^{(1,1)}}$$

и введем величину

$$C_{12}^* = \frac{\Omega_{12}^{(1,2)}}{3\Omega_{12}^{(1,1)}}.$$

Используя связь между  $\mathbf{b}_\alpha$  и  $\mathbf{h}_\alpha$  (П.4.2), выражение для  $\mathbf{R}_1^T$  можно тогда представить в виде

$$\mathbf{R}_1^T = \frac{n_1 n_2 k T}{n [D_{12}]_1} \mu_{12} \xi_{12} \left( \frac{\mathbf{h}_2}{m_2 p_2} - \frac{\mathbf{h}_1}{m_1 p_1} \right), \quad (\text{П.4.9})$$

где

$$\xi_{12} = \left( \frac{6}{5} C_{12}^* - 1 \right).$$

Именно в такой форме выражение для «термосилы» используется в главе 6.

## Список использованной литературы

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, Т.V).
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, Т.VI).
5. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
6. Смирнов Б.М. Физика слабо ионизованного газа. М.: Наука, 1972.
7. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М.: Атом издат, 1964.
8. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976.
9. Де Гроот С.Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
10. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
11. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1976. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, Т.I).
13. Мак-Даниель И. Процессы столкновений в ионизованных газах. М.: Мир, 1967.
14. Мак-Даниель И., Мэзон И. Подвижность и диффузия ионов в газах. М.: Мир, 1976.
15. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965.
16. Елецкий А.В., Палкина Л.А., Смирнов Б.М. Явления переноса в слабоионизованном газе. М.: Атомиздат, 1975.
17. Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. М.: Госатомиздат, 1961.

18. Жданов В.М. Процессы переноса в многокомпонентной плазме. М.: Физматлит, 2009.
19. Голубев И.Ф., Гнездилов Н.Е. Вязкость газовых смесей, М.: Стандартгиз, 1971.
20. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика и молекулярная физика. М. Наука, 1975.
21. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, 1979.
22. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. М.: Высшая школа, 1981.
23. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
24. Вальдман Л. Явления переноса в газах при среднем давлении // Термодинамика газов, М.: Машиностроение, 1970.
25. Мейзон.Е. Перенос в нейтральном газе. // Кинетические процессы в газах и плазме, под ред. А.Хочштима. М.: Атомиздат, 1972.
26. Present R.D. Kinetic theory of gases McGraw –Hill. New York, 1958.
27. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: ИИЛ, 1959.
28. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Интеллект, 2008.
29. Жданов В.М., Каган Ю.М., Сазыкин А.А. // ЖЭТФ. Т.42. С.857, 1962.
30. Жданов В.М. Тайны разделения изотопов. М.: МИФИ., 2004.
31. Грю К.Э., Иббс Т.Л. Термическая диффузия в газах. М.: ГИТТЛ, 1956.
32. Furry W.H. // Amer. J. Phys. v.16 . p.63, 1948.
33. Грэд Г. Кинетическая теория газов // Термодинамика газов. М.: Машиностроение, 1970. С.5.
34. Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969.
35. Хохштим А., Массель Г. Вычисление коэффициентов переноса в ионизованных газах. // Кинетические процессы в газах и плазме, под ред. А.Хочштима. М.: Атомиздат, 1972.
36. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы, под ред. М.А. Леонтовича. Вып.1. М.: Госатомиздат, 1963. С.183.

Владимир Михайлович Жданов

Явления переноса в газах и плазме

Учебное пособие

Редактор Н.В. Егорова

Подписано в печать 20.11.2008. Формат 60 × 84 1/16

Печ.л. 15,0. Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 150 экз.

Изд. № 4/19. Заказ № 2-2416

Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)  
115409, Москва, Каширское ш., 31

Типография издательства «Тривант».  
г. Троицк Московской области